

இரு பரிமாணப் பகுமுறை வடிவகணிதம்

(ANALYTICAL GEOMETRY OF TWO DIMENSIONS)

(மட்டம்மடிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர் :

திரு. ஏ. கோவிந்தராஜுலு, M.Sc., B.Ed.,

கணிதப் பேராசிரியர்,

சிக்கன்னு அரசினர் கலைக் கல்லூரி,

திருச்சூர்.



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் திருவளம்

இரு பரிமாணப் பகுமுறை வடிவகணிதம்

(ANALYTICAL GEOMETRY OF TWO DIMENSIONS)

(மட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர் :

திரு. ஏ. கோவிந்தராஜுலு, M.Sc., B.Ed.,

கணிதப் பேராசிரியர்,

சிக்கல்கு ஆர்திவர் கலைக் கல்லூரி,

திருப்பூர்.



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—December, 1971

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 277

© TAMIL NADU TEXT BOOK SOCIETY

ANALYTICAL GEOMETRY OF TWO DIMENSIONS, FOR B.Sc.

A. GOVINDARAJULU

Net Price Rs. 8-2½

(No discount)

"Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of Books and Literature in regional languages at the University level, of Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare."

Printed by
KUMARAN PRESS,
258, Mbat Street,
Madras-1

அண்ணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி—உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்)

தமிழ்நாடு கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கப் பதினே ராண்டுகள் ஆகியிருக்கின்றன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் செ.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தமிழ் பாடங்கள் ஆசிரியர்களும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1955ஆம் ஆண்டில் தொடக்கத் திம் புத்தக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1956ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், சிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற் கெனத் தந்த உழைப்பு, தமிழ் சிறப்புத் துறைகளில் தமிழ் எழுதித் தர முன்வந்த துணைப்போலர்கள் தொண்டுரைச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்பினாலே மகிழ்ச்சியும் மன திறமும் நாத்தகக் வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இங் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, ஆதினியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்கு தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டு நோதும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பயிற்சியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிக்குள்ளிடையே குறுகிய காலத்தில் ஆகிய முறையில் தங்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வருவாறு, அரசியல், உளியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புயியல், கணிதம், பொருத்தம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தமிழ் தரிகள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாட நூல் திறவனம் வெளிவிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'திரு பரிமாணப் பத துறை அடிகளிலும்' என்ற இத் தரல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் திறவனத்தின் 277ஆவது வெளிவிடாகும். இதுவரை 312 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வார உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பவிலும் மாணவர்கள் உலக மண்ணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழ்நாட்டின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலத்த நன்சி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

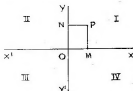
	பக்கம்
1. அறிமுகம்	1
2. தேர்ச்சோடு	18
3. இரட்டைக் கோடுகள்	48
4. வட்டம்	81
5. ஒழுதிஸ் வட்டங்கள்	120
6. பரவளைவு (Parabola)	166
7. நீள்வட்டம்	224
8. அதிபரவளைவு (Hyperbola)	312
9. இருபடிவின் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல்	396
10. கோண தூரச் சமன்பாடுகள்	430
கிடைச் கோடுகள்	439

1. அறிமுகம் (Introduction)

1.1. இயற்கணிதத்தைக் கொண்டு வடிவ கணிதத் தேற்றங்களை நிறுவும் ஒரு முறையே ஆயத் தொலை வடிவ கணிதமாகும். தம்மன் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் இரு கோடுகள் தளத்தை நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கும். ஒவ்வொரு பகுதியும் ஒரு கர்ப்பகுதி (quadrant) எனப்படும். $X'OX$, $Y'OY$ என்பவை தம்மன் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகள் எனக் கொள்வோம். XOY , YOX' , $X'OY'$, $Y'OX$ எனும் பகுதிகள் முறையே முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம், நான்காம் கர்ப்பகுதிகள் எனப்படும்.

1.2. அச்சத் தூங்குகள் (Coordinates)

$X'OX$ எனும் கோடு x ஆயமெனவும், $Y'OY$ எனும் கோடு y ஆயமெனவும் கூறப்படுகின்றன. இவை இரண்டும் சந்திக்கும் புள்ளி O ஆதி (origin) எனப்படும்.

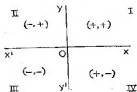


படம் 1.

ஆதிமேற்குத்து x ஆயத்திற்கு இணையாக அளக்கப்படும் ஒரு புள்ளியின் தொலை x ஆயத்தொலை என்றும், அங்ஙனமே y ஆயத்திற்கு இணையாக அளக்கப்படும் அதன் தொலை y ஆயத்தொலை என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

தளத்தில் P என்ற யாதேனும் ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். P புள்ளியிலிருந்து x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக PM என்ற கோட்டையும், y ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக PN என்ற கோட்டையும் வரையவும். OM , MP என்ற அளவுகளும் அறிந்தால் P என்ற புள்ளியின் நிலையைத் தளத்தில் குறிக்கலாம். OM , MP என்ற இரண்டு அளவுகளும் ஒன்றையே P என்ற புள்ளியின் x ஆயத்தொலையும், y ஆயத்தொலையுமாகும். இம் முறைப்படி பிரெஞ்சு நாட்டுக் கணித மேதை ரெனே டெக்கார்ட் (Rene Descartes) (1593-1650) என்பவர் முதன் முதலில் வரைண்டால் இவை செய்வாகக் கண்டறிவான் ஆயத்தொலைகள் (Rectangular Cartesian Coordinates) எனப்படுகின்றன. $OM=x$, $MP=y$ எனில், P புள்ளியின் ஆகத் தூரங்கள் அல்லது ஆயத்தொலைகள் குறுக்களாக (x, y) எனக் குறிப்பிடப்படுகின்றன. ஆதியின் ஆயத்தொலைகள் $(0, 0)$ ஆகும்.

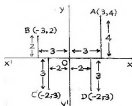
x ஆயத்திற்கு உட்புறமாக அளக்கப்படும் x ஆயத்தொலைகள் நேர்மதிப்பு (positive value), இடப்புறமாக அளக்கப்படுபவை எதிர் மதிப்பு (negative value) கொண்டிருக்கும். இவ்வாறே y ஆயத்திற்கு மேற்புறமாக அளக்கப்படும் y ஆயத் தொலைகள் நேர்மதிப்பும், கீழ்ப்புறமாக அளக்கப்படுபவை எதிர் மதிப்பும்



படம் 2.

கொண்டிருக்கும். எனவே, மூத்த காற்பகுதியிலுள்ள புள்ளிகளின் இருண்டு ஆயத்தொலைகளும் நேர்மதிப்புடையனவாகவும், மூன்றாம் காற்பகுதியிலுள்ள புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் எதிர் மதிப்புடையனவாகவும் இருக்கும். இரண்டாம் காற்பகுதியில் x ஆயத்தொலை எதிர்மதிப்பும், y ஆயத்தொலை நேர் மதிப்பும் கொண்டவை. நான்காம் காற்பகுதியில் x ஆயத்தொலை நேர் மதிப்பும், y ஆயத்தொலை எதிர் மதிப்பும் கொண்டிருக்கும்.

மாதி 1: $A(3, 4)$, $B(-3, 2)$, $C(-2, -3)$, $D(2, -3)$ என்ற புள்ளிகளை ஒரு தாளில் குறிக்கவும்.



படம் 3.

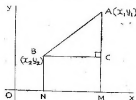
OY -ன் மீது 3 அலகு தூரம் குறித்துப் பின் OY -க்கு இணை வாக 4 அலகு தூரம் அளத்தால் $A(3, 4)$ புள்ளியையும்,

OX -ன் மீது 3 அலகு தூரம் குறித்துப் பின் OY -க்கு இணை வாக 2 அலகு தூரம் அளத்தால் $B(-3, 2)$ புள்ளியையும்,

OX -ன் மீது 2 அலகு தூரம் குறித்துப் பின் OY -க்கு இணை வாக 3 அலகு தூரம் அளத்தால் $C(-2, -3)$ புள்ளியையும்,

OX -ன் மீது 2 அலகு தூரம் குறித்துப் பின் OY -க்கு இணை வாக 3 அலகு தூரத்தைப் அளத்தால் $D(2, -3)$ புள்ளியையும் பெறலாம்.

1.3. இரு புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம்



படம் 4.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இது புள்ளிகள் A, B எனவும், ஆனவ
களின் ஆயத்தொலைகள் முறையே $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ எனவும்
கொள்வோம். x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக AM, BN என்ற
இரு செங்குத்துக் கோடுகள் வரையவும். B, C -ஐ இணைக்கவும்.

$$OM = x_1, ON = x_2, MA = y_1, NB = y_2$$

$$\therefore BC = NM = OM - ON = x_1 - x_2$$

$$AC = AM - CM = AM - BN = y_1 - y_2$$

செங்கோண முக்கோணம் ABC -யில்,

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\therefore AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

இஃது : $O(0, 0), A(x_1, y_1)$ ஆதலால்,

$$OA^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

பயிற்சி 1.1.

கீழ் வரும் புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தைக் காண்க :

1. $(5, 8), (4, 5)$

2. $(8, 1), (-2, 2)$

3. $(-7, 2), (8, -4)$

4. $(-3, -5), (-6, -8)$

5. $(a \cos \theta, a \sin \theta), (a \cos \phi, a \sin \phi)$

6. $(at_1^2, 2at_1), (at_2^2, 2at_2)$

7. $(2, 1), (5, 4), (4, 7), (1, 4)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு இணை
சுரத்தில் உச்சிகள் என நிறுவுக.

8. $(a, a), (-a, -a), (-a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு
சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

9. $(1, 7), (8, 6), (7, -1)$ என்ற புள்ளிகளுக்குச் சமதூரத்
நிலுள்ள புள்ளியைக் காண்க.

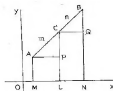
விடைகள்

1. $\sqrt{10}$. 2. $\sqrt{25}$. 3. $\sqrt{136}$. 4. $\sqrt{13}$.

5. $2a \sin \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right)$. 6. $a(t_1 - t_2) \sqrt{(t_1 + t_2)^2 + 4}$.

9. $(4, 4)$.

1.4. (x_1, y_1) , (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை $m:n$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்.



படம் 5.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு புள்ளிகள் எனக் கொள்ளோம். AB என்ற கோட்டை உட்புறம் $m:n$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $C(x, y)$ எனில்,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}.$$

x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக AM , BN , CL என்ற கோடுகளையும், CL , BN என்பவையகளுக்குச் செங்குத்தாக AP , CQ என்ற கோடுகளையும் வரைக.

$$AP = ML = OL - OM = x - x_1$$

$$CQ = LN = ON - OL = x_2 - x$$

$$CP = CL - PL = CL - AM = y - y_1$$

$$BQ = BN - QN = BN - CL = y_2 - y.$$

$\triangle ACP$, $\triangle BCQ$ இரண்டும் வடிவொத்தவை.

$$\therefore \frac{AP}{CQ} = \frac{m}{n} \quad (\text{அ.து}) \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore m(x_2 - x) = n(x - x_1) \quad (\text{அ.து}) \quad x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

$$\text{மேலும், } \frac{CP}{BQ} = \frac{m}{n} \quad \therefore \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore m(y_2 - y) = n(y - y_1)$$

$$(\text{அ.து}) \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}.$$

எனவே AB என்ற கோட்டை $m:n$ விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி C -யின் ஆயத்தொலைகள்,

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$$

இவ்வாறே AB கோட்டைப் புள்ளி C' வெளிப்புறம் $m:n$ விகிதத்தில் பிரிக்கு வெளியீ, C' -யின் ஆயத்தொலைகள்

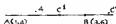
$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n} \right)$$

என நினைவாம்.

கிளை : $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் நடுப் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்,

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

மாதிரி 2 : $(1, 4), (3, 6)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் 4:1 விகிதத்தில் உள்புறம் புறநும் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் காண்க.



படம் 8.

$A(1, 4), B(3, 6)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் 4:1 விகிதத்தில் உட்புறம் C -யும், வெளிப்புறம் C' -யும் பிரிக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

C -யின் ஆயத்தொலைகள்

$$x = \frac{4(3) + 1(1)}{4 + 1} = \frac{13}{5}$$

$$y = \frac{4(6) + 1(4)}{4 + 1} = \frac{28}{5}$$

$$\therefore C\text{-யின் ஆயத்தொலைகள் } \left(\frac{13}{5}, \frac{28}{5} \right)$$

C-ன் ஆயத் தொலைகள்

$$x = \frac{4(8) - 1(1)}{4 - 1} = \frac{11}{3}$$

$$y = \frac{4(8) - 1(4)}{4 - 1} = \frac{20}{3}$$

∴ C-ன் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{11}{3}, \frac{20}{3}\right)$.

மாதிர் 3 : A(-3, 4), B(1, -2) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.



படம் 7.

AB என்ற கோட்டை C, D புள்ளிகள் முச்சமக் கூற்றுள்ளன எனில் $AC = CD = DB$. (அ-து) AB கோட்டை, C உட்புறம் 1:2 விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. மேலும் CB-யின் நடுப்புள்ளி D ஆகும்.

∴ C-யின் ஆயத் தொலைகள்

$$x = \frac{1(1) + 2(-3)}{1 + 2} = -\frac{5}{3}$$

$$y = \frac{1(-2) + 2(4)}{1 + 2} = 2$$

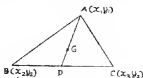
D-யின் ஆயத் தொலைகள்

$$x = \frac{-\frac{5}{3} + 1}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{2 + (-2)}{2} = 0$$

எனவே AB கோட்டை முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் $C\left(-\frac{5}{3}, 2\right)$, $D\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

மேலே 4 : (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) புள்ளிகளை உக்ரி
கவாகக் கொண்டு, முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சத்தி
(Centroid) காண்க.



படம் 8.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ எனக் கொள்வோம்.
 BC -யின் நடுப்புள்ளி D எனில் அதன் ஆயத் தொலைகள்

$$\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right)$$

ஆகும். மையக் கோட்டுச் சத்தி G மையக் கோடு AD -யின் மீது
அமையும். மேலும் G , மையக் கோட்டை, $2:1$ விகிதத்தில்
பிளக்கும்.

$$(அ-து) AG : GD = 2 : 1$$

$\therefore G$ -யின் ஆயத் தொலைகள்

$$x = \frac{2 \left(\frac{x_2 + x_3}{2} \right) + 1 \cdot x_1}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2 \left(\frac{y_2 + y_3}{2} \right) + 1 \cdot y_1}{2 + 1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

எனவே, மையக் கோட்டுச் சத்தி

$$G \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \text{ ஆகும்.}$$

மீதிக்கீழ் (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் உள் வட்டமையம் (inocentre) காண்க.



படம் 9.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ எனக்கொள்வோம்.

கோணம் A -யின் உள்நிலை சமவெட்டி BC -ஐ D -யில் வெட்டுகிறது.

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \quad (1) \quad [\because AB = c, BC = a, CA = b]$$

எனவே, D -யின் ஆயத்தொலைவுகள் $\left[\frac{cx_2 + bx_3}{c+b}, \frac{cy_2 + by_3}{c+b} \right]$ முக்கோணத்தின் உள் வட்டமையம் I , AD -யின் மீதமையும்.

$$(1)\text{-ஐக்குத்து} \quad \frac{BD + DC}{BD} = \frac{c + b}{c} \quad (\text{அ.து}) \quad \frac{BC}{BD} = \frac{b + c}{c}.$$

$$\therefore BD = \frac{c}{b + c}, \quad BC = \frac{ac}{b + c}.$$

BI என்ற கோடு B -யின் உள்நிலை சமவெட்டியாதலின்,

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{c}{\frac{ac}{b + c}} = \frac{b + c}{a}$$

(அ.து) AD -ஐ I புள்ளி $b + c : a$ விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

∴ L -யின் ஆயத்தொலைகள்,

$$x = \frac{(b+c) \left[\frac{cx_3 + bx_2}{b+c} \right] + a(x_1)}{b+c+a} = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}$$

$$y = \frac{(b+c) \left[\frac{cy_3 + by_2}{b+c} \right] + a(y_1)}{b+c+a} = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}$$

எனவே உள்வட்ட மையத்தின் ஆயத்தொலைகள்

$$I \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c} \right).$$

பயிற்சி 12.

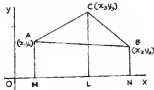
1. $A(0, -2)$, $B(6, 1)$, $C(10, 4)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டிலுமையுள் என நிறுவுக.
2. $A(1, -3)$, $B(8, 2)$, $C(6, 8)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையுள் என நிறுவி $AB : BC$ காண்க.
3. $(1, -3)$, $(-3, 9)$ புள்ளிகளைச் செங்குத்தும் கோட்டை உள்லும் புறமும் $1 : 3$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் யாவை?
4. $A(2, 4)$, $B(-4, 0)$, $C(0, 0)$ புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தில் BC -யின் மூலம் புள்ளி D எனில், AD -ஐ உள்லும் புறமும் $2 : 1$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க.
5. $(-5, 12)$, $(9, -2)$ புள்ளிகளைச் செங்குத்தும் கோட்டின் மூலம் புள்ளி $(-8, -5)$, $(7, 10)$ என்ற புள்ளிகளைச் செங்குத்தும் கோட்டை மூலமாக கூற்றும் என நிறுவுக.
6. $(2, 1)$, $(5, 4)$, $(1, 4)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டின் மூன்று உச்சிகளெனில் $(2, 1)$ புள்ளிக்கு எதிரியே குகும் தாக்காவது உச்சி யாது?
7. இவ் வற்றும் புள்ளிகளாலமையும் முக்கோணங்களின் மையங்கோட்டுச் சத்தியைக் காண்க.

- (i) $(3, -4)$, $(-2, 5)$, $(5, 3)$
 (ii) $(-3, 6)$, $(5, 2)$, $(1, -5)$
 (iii) $(6, -4)$, $(2, -2)$, $(7, 0)$
8. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு முனைகள் $(7, 2)$, $(1, 6)$. அதன் மையக் கோட்டுச் சத்தி $(4, 8)$ எனில் மூன்றாவது முனைகை காண்க.
9. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு முனைகள் $(3, -1)$, $(-2, 6)$. அதன் மையக் கோட்டுச் சத்தி ஆதி (origin) எனில் மூன்றாவது முனைகை காண்க.
10. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் $(4, -1)$, $(-1, -2)$, $(1, -3)$ எனில் அதன் மையக் கோட்டுச் சத்தியைக் காண்க.
11. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் $(3, -1)$, $(-1, -2)$, $(1, -3)$ எனில் அதன் மையக் கோட்டுச் சத்தியைக் காண்க.
12. $ABCD$ என்ற நகர்வுத்தின் அடுத்தடுத்த முனைகள் $(-1, -2)$, $(2, 1)$, $(8, 4)$, $(1, 2)$ எனில் BD மூலை விட்டத்தை (diagonal) AC மூலை விட்டம் பிளக்கும் விவரம் காண்க.
13. $(1, -3)$, $(-1, -5)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை $(7, 3)$ என்ற புள்ளி பிளக்கும் விவரம் யாது?
14. ஒரு முக்கோணத்தில் யாதேனும் இரு பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு மூன்றாம் பக்கத்தின் பாதக்குச் சமம் என நிறுவுக.
15. $(2, 8)$, $(-15, 1)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை x ஆயம் பிளக்கும் விவரம் யாது?

விடைகள்

1. $2:3$, 2. $\left(\frac{10}{7}, \frac{38}{7}\right)$; $(-2, -9)$, 4. $(1, 8)$;
 $\left(\frac{4}{9}, \frac{10}{9}\right)$, 6. $(4, 7)$, 7. (i) $(2, 1)$; (ii) $(1, 1)$;
 (iii) $(6, -2)$, 8. $(4, 10)$, 9. $(-1, -2)$, 10. $(2, -2)$,
 11. செனியே $3:4$, 12. $2:5$.

1.5. ஒக்கோணத்தின் பரப்பு



படம் 10.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ஒக்கோணத்தின் ஒன்று உச்சிகள் எனக் கொள்வோம்.

x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக AM , BN , CL என்ற கோடுகள் வரப்பெறும்.

$$ML = OL - OM = x_3 - x_1; \quad AM = y_1$$

$$LN = ON - OL = x_2 - x_3; \quad CL = y_2$$

$$MN = ON - OM = x_2 - x_1; \quad BN = y_3$$

$\triangle ABC$ -யின் பரப்பு = செங்குத்து (trapezium) $ACLM$ + செங்குத்து $BCLN$ - செங்குத்து $ABNM$.

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} (AM + CL) ML + \frac{1}{2} (CL + BN) LN \\ &\quad - \frac{1}{2} (AM + BN) MN \\ &= \frac{1}{2} [(y_1 + y_2)(x_3 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) \\ &\quad - (y_3 + y_1)(x_2 - x_1)] \end{aligned}$$

இதனைக் கருதுகிறீர்.

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} [y_1(y_3 - y_2) + y_2(y_3 - y_1) + y_3(y_1 - y_2)].$$

வினா 1: $(0, 0)$, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளால் அமைந்துள்ள ஒக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2} [x_1 y_2 - x_2 y_1]$.

வினா 2: வரதேவனும் ஒன்று புள்ளிகளாலானதையும் ஒக்கோணத்தின் பரப்பி பூச்சியம் (zero) எனில் அம் ஒன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைவன.

குறிப்பு : முக்கோணம் ABC -ஐச் சுற்றி வரும்போது முக்கோணம் இடப்படுமா? இதுக்குமாறு A, B, C புள்ளிகளைக் குறித்தால் முக்கோணத்தின் பரப்பு நேர்மதிப்புக் கொண்டிருக்கும்.

மாதிரி 6 : $(1, 1), (4, -7), (6, -2)$ புள்ளிகளால் ஆனது ஏன் முக்கோணத்தின் பரப்பு யாது ?

$$x_1 = 1; x_2 = 4; x_3 = 6$$

$$y_1 = 1; y_2 = -7; y_3 = -2.$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2} [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] \\ &= \frac{1}{2} [1 (-7 + 2) + 4 (-2 - 1) + 6 (1 + 7)] \\ &= \frac{1}{2} [-5 - 12 + 48] = 15.5. \end{aligned}$$

∴ முக்கோணத்தின் பரப்பு = 31 சதுர அலகுகள் (square units).

மாதிரி 1.3.

1. பின் வரும் புள்ளிகளால் ஆனவையும் முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

$$(i) (2, 3); (3, -1); (-4, 2)$$

$$(ii) (8, 5); (9, 3); (6, 2)$$

$$(iii) (-2, 3); (-7, 6); (3, -5).$$

2. பின் வரும் புள்ளிகளாலையையும் நான்குதரத்தின் பரப்பைக் காண்க.

$$(i) (1, 2), (2, -3), (-1, -5), (-2, 4)$$

$$(ii) (-4, 2), (3, -5), (8, -2), (1, 7)$$

$$(iii) (-3, -3), (1, -2), (2, 3), (-2, 8).$$

3. பின் வரும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்க்கோட்டிலுள்ளவையும் என நிரூபித.

$$(i) (1, 4), (3, -2), (-3, 16)$$

$$(ii) (4, 2), (7, 3), (9, 7)$$

$$(iii) (2, 5), (4, 8), (5, 8).$$

4. $(1, 8), (3, 0), (6, -4)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்க்கோட்டிலுள்ளவையும் எனில் a -யின் மதிப்பு என்ன ?

வினாக்கள்

1. (i) 88; (ii) 7; (iii) 15,
2. (i) 21; (ii) 112; (iii) 20,
4. 4.

11.6. நிவம்பரணை (அ - து) இயங்கு வழி (Locus)

ஒரு புள்ளி ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விதிவிலக்கான இயங்குமையின் அப் புள்ளியின் பாதை நிவம்பரணை அல்லது இயங்கு வழி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, Q , R என்ற இரு நிலைத்த புள்ளிகளிலிருந்து (fixed points) எப்பொழுதும் சம தூரத்திலிருக்குமான P என்ற புள்ளி இயங்குமையின், அப் புள்ளியின் இயங்கு வழி நிலைத்த புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்கு மையக் கோடாக அமையும். அதாவது, இத்தக் கோட்டின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் நிலைத்த புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்திலிருக்கும். இங்கு இயங்கு வழி ஒரு சேக் கோடாகும்.

மேலும், O என்ற நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும் சம தூரத்திலிருக்குமான தடையும் P என்ற புள்ளியின் இயங்கு வழி ஒரு வட்டமாகும். இவ் வட்டத்தின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் நிலைத்த புள்ளி O -யிலிருந்து சம தூரத்திலிருக்கும். நிலைத்த புள்ளி வட்டத்தின் மையம். நிலையான தூரம் அங் வட்டத்தின் ஆரமாகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட விதிப்படி இயங்கும் புள்ளியின் இயங்கு வழியை ஒரு சமன்பாட்டின் மூலம் தெரிவிக்கலாம். எடுத்துக் காட்டாக $(1, 2)$, $(3, 4)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x, y)$ எனின், இம் மூன்று புள்ளிகளாலும் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்புப் பூச்சியமாகும்.

$$\text{எனவே, } \frac{1}{2} [x(2-4) + 1(4-y) + 3(y-2)] = 0.$$

இதனாக கருக்கின் $x - y + 1 = 0$ என்றாகும். இச் சமன்பாடு அக் கோட்டின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுக்கும் பொருத்தும், இதுவே அக் கோட்டின் சமன்பாடு எனப்படும். பொதுவென்பதாயல்பு புள்ளிகள் ஒரு விதிப்படி இயங்கின் அவை ஓர் இயங்கு வழியின் அமைகின்றன. இப் புள்ளிகள் அனைத்தும் பொருத்தமும், மற்றப் புள்ளிகள் பொருத்தமின்றியும் நகரப்படும் சமன்பாடுதான் இப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி எனப்படும்.

மாதிரி 7 : $(1, 2)$ என்ற நிலைத் புள்ளியிலிருந்து எப் பொழுதும் 5 அகல தூரத்திலிருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்க வழிக் காண்க.

நிலைத் புள்ளி $C(1, 2)$, நகரும் புள்ளி $P(x, y)$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore CP^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$$

ஆனால், $CP^2 = 5^2 = 25$.

$$\therefore (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \quad \therefore$$

எனவே $P(x, y)$ புள்ளியின் இயங்க வழி,

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0.$$

மாதிரி 8 : $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்திலிருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்க வழி என்ன?

கொடுக்கப்பட்டிருள்ள விதிக்கிணங்க நகரும் புள்ளி $P(x, y)$ எனக் கொள்வோம்.

$$PA^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$$

$$PB^2 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2.$$

விதிப்படி $PA = PB \quad \therefore PA^2 = PB^2$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$$

$$\therefore 4x + 4y - 20 = 0$$

$$(\text{அ-அ}) \quad x + y - 5 = 0.$$

$P(x, y)$ புள்ளியின் இயங்க வழி $x + y - 5 = 0$.

மாதிரி 9 : $(2, 0)$, $(-2, 0)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து 4 : 3 விகித தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் இயங்க வழிக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டிருள்ள கட்டுப்பாட்டிற்கிணங்க நகரும் புள்ளி $P(x, y)$ எனக் கொள்வோம்.

$A(2, 0)$, $B(-2, 0)$ எனில்

$$PA^2 = (x - 2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4$$

$$PB^2 = (x + 2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 4x + 4$$

$$\text{கூட்டுவது} \quad \frac{PA}{PB} = \frac{4}{8} \quad \therefore \quad \frac{PA^2}{PB^2} = \frac{16}{64}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2 + y^2 - 4x + 4}{x^2 + y^2 + 4x + 4} = \frac{16}{64}$$

$$\text{(அ-து)} \quad 16x^2 + 16y^2 + 64x + 64 = 9x^2 + 9y^2 - 36x + 36$$

$$\therefore \quad 7x^2 + 7y^2 + 100x + 28 = 0$$

எனவே $P(x, y)$ -யின் இயங்கு வர்தி $7x^2 + 7y^2 + 100x + 28 = 0$.

பயிற்சி 1.4.

1. $(2, 3)$, $(4, 5)$ புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்திலியங்கும் புள்ளியின் இயங்கு வர்தி என்ன?
2. ஆதியிலிருந்து நனக்குள்ள தூரம் $(3, 2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து நனக்குள்ள தூரத்தை விட தூர மடங்கு இருக்குமாறு நனக்கும் புள்ளியின் இயங்கு வர்தி என்ன?
3. ஒரு புள்ளியின் y ஆயத் தொலைவு அதன் x ஆயத் தொலைவை விட இரு மடக்கெனில் அப் புள்ளியின் இயங்கு வர்தி என்ன?
4. $(1, -1)$ புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும் 8 அலகு தூரத்திலியங்கும் புள்ளியின் இயங்கு வர்திக் காண்க.
5. $(2, 3)$, $(-3, 4)$ என்ற புள்ளிகளுடன் $P(x, y)$ புள்ளி அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு 8.5 எனில் P -யின் இயங்கு வர்திக் காண்க.
6. $(2, 2)$, $(-2, -2)$ புள்ளிகளிலிருந்து $P(x, y)$ புள்ளியின் தூரங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 46 எனில் P -யின் இயங்கு வர்திக் காண்க.
7. $(0, 0)$, $(-2, 0)$ புள்ளிகளிலிருந்து $P(x, y)$ புள்ளியின் தூரங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 46 எனில் P -யின் இயங்கு வர்தி என்ன?

8. ஆய்வகத்திலும் தனக்குழந்தை தூங்கலின் வர்க்கம் களின் கூட்டுத் தொகை 8 ஆக இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.
9. $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$ புள்ளிகளிலிருந்து $P(x, y)$ -யின் தூரம் கன்நம் கூட்டுத் தொகை 2a எனில் P-யின் இயங்கு வழி $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என நிறுவுக $[b^2 = a^2 (1 - e^2)]$.

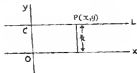
விடைகள்

1. $x+y-7=0$. 2. $3x^2+8y^2-16x-16y+82=0$.
 3. $y=2x$. 4. $x^2+y^2-2x+2y-7=0$. 5. $x+5y-84=0$. 6. $x^2+y^2=16$. 7. $x^2+y^2=a^2$.
 8. $x^2+y^2=0$.

2. நேர்க்கோடு (The Straight Line)

2-1. x ஆயத்திற்கு இணையான நேர்க்கோடு

x ஆயத்திற்கு இணையான CL என்ற ஒரு நேர்க்கோடு x ஆயத்திற்குத் தூரம் k அளவு ஓரத்தில் வரையவும். அக்கோட்டின் மீது $P(x, y)$ வரதேனும் ஒரு புள்ளி எனின் அப்புள்ளியின் y ஆயத்



படம் II.

தொலை k ஆகும். (அ-து) $y=k$. இஃது அக்கோட்டின் மீதமைந்த அனைத்து ஒருவொரு புள்ளிக்கும் பொருத்தும்.

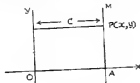
எனவே $y=k$ என்பது x ஆயத்திற்கு இணையாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடாகும். இதில் x காணப்படாதது குறிப்பிடத்தக்கது.

(இவை : x ஆயத்தின் சமன்பாடு $y=0$.)

2-2. y ஆயத்திற்கு இணையான நேர்க்கோடு

y ஆயத்திற்கு இணையான AM என்ற ஒரு நேர்க்கோடு y ஆயத்திற்குத் தூரம் c அளவு ஓரத்தில் வரையவும். அக்கோட்டின் மீது

$P(x, y)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின் அப்புள்ளியின் x ஆயத் தொலை c ஆகும். (அ-து) $x=c$. இஃது அக்கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் பொருத்தும்.



படம் 12.

எனவே y ஆயத்திற்கிணையாக c அல்லது தூரத்திலுள்ள ஒரு தேக்கோட்டின் சமன்பாடு $x=c$ ஆகும். இச்சமன்பாட்டின் y வரணப்படாதது குறிப்பிடத்தக்கது.

உண் : y ஆயத்தின் சமன்பாடு $x=0$ ஆகும்.

மாதிரி 1 : x ஆயத்திலிருந்து 6 அல்லது தூரத்தில் அதற்கிணையாக உள்ள தேக்கோட்டின் சமன்பாடு $x=6$ (அ-து) $x-6=0$ ஆகும்.

x ஆயத்திலிருந்து -6 அல்லது தூரத்தில் அதற்கிணையாக உள்ள தேக்கோட்டின் சமன்பாடு $x=-6$ (அ-து) $x+6=0$ ஆகும்.

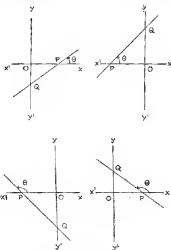
y ஆயத்திலிருந்து 7 அல்லது தூரத்தில் அதற்கு இணையாகச் செல்லும் தேக்கோட்டின் சமன்பாடு $y=7$ (அ-து) $y-7=0$ ஆகும்.

y ஆயத்திலிருந்து -4 அல்லது தூரத்தில் அதற்கிணையாகச் செல்லும் தேக்கோட்டின் சமன்பாடு $y=-4$ (அ-து) $y+4=0$ ஆகும்.

2.3. தேக்கோட்டின் சரிவு (Gradient or Slope)

PQ என்ற தேக்கோடு x ஆயத்தை P -யில் வெட்டுகிறது எனக்கொள்வோம். PX என்ற கோட்டை P -யில் ஆரம்பித்து இடஞ் சுழியாகச் சுழற்றி (anticlockwise) PQ என்ற நிலைக்குக் கொண்டு

வரவும். PX கோட்டைச் சுற்றிய கோணம் θ எனக்கொள்வோம். மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படங்களுக்கு θ கோணம் 0° -க்கு மேல் 180° -க்குள் உட்கட்டதானிருக்கும் என அறிகிறோம்.



படம் 18.

(அ-து) ஒரு நேர்க்கோடு x ஆயத்தை எப்படி வெட்டினாலும் அக் கோடு x ஆயத்துடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் 0° -க்கு மேல் 180° -க்குள் ஏதோ ஒரு மதிப்புடையதாக இருக்கும்.

மேலே எப்படி நேர்க்கோட்டின் சாய்வு வீதம் அல்லது சரிவு எனப்படும். அதை m எனக் குறிப்பிடுவது மரபு. (அ-து) $m = \tan \theta$. θ குறுங்கோண மெனின் சரிவு m நேர் மதிப்பும், வீல்கோண மெனின் எதிர் மதிப்பும் கொண்டிருக்கும்.

இணையாகச் செல்லும் கோடுகள் x ஆயத்தின் ஏற்படுத்தும் கோணம் சமபாதளம் ஆகவகையில் சரிவுகள் சமமாக இருக்கும். (அ-து) சரிவுகள் சமமெனின் அக் கோடுகள் இணை கோடுகளாகும்.

x ஆயம், அதற்கு இணையாகச் செல்லும் கோடுகள் யாவத் திறந் சரிவு பூச்சியம் [$\because \tan 0 = 0$].

y ஆயம், அதற்கு இணையாகச் செல்லும் கோடுகள் யாவத் திறந் சரிவு கத்தழியாகும் [$\because \tan 90 = \infty$].

2.4. வெட்டுத்துண்டு (Intercept)

ஒரு தேக்கோடு x ஆயத்தை A புள்ளியிலும், y ஆயத்தை B புள்ளியிலும் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம். O ஆகி எனில் OA , OB என்பவை முறையே x -வெட்டுத் துண்டு (x -intercept), y -வெட்டுத்துண்டு (y -intercept) எனப்படுகின்றன. வெட்டுத் துண்டுகள் தேர் மதிப்புடைபளவாகவோ, எதிர் மதிப்புடைபளவாகவோ இருக்கும்.

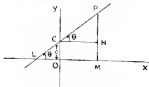
2.5. தேக்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

ஒரு தேக்கோட்டைத் தீர்மானிக்க இரு கட்டுப்பாடுகள் போதுமானவையும், தேவையானவையுமாகும்.

2.6. வெட்டுத்துண்டு சரிவு வடிவம் (Intercept-Slope Form)

ஒரு தேக்கோட்டின் சரிவும், y ஆயத்தில் அஃது ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டும் கொடுக்கப்படின் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சரிவு $m = \tan \theta$ எனவும், அக்கோடு y ஆயத்தில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டு c எனவும் கொள்வோம்.



படம் 14.

y ஆயத்தின்மீது $OC = c$ அளவிற்கு C என்ற புள்ளியைக் குறித்து C வழியாக x ஆயத்துடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள CL என்ற கோடு வரையவும். CL என்ற கோட்டின் சமன்பாடு காண ஆக் கோட்டின்மீது $P(x, y)$ என்ற யாதெனும் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கவும். x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக PM என்ற கோடும், PM -க்குச் செங்குத்தாக CN என்ற கோடும் வரையவும்.

$$\angle PCN = \theta \text{ (ஒத்த கோணம்)}$$

$$OM = x, MP = y$$

$$\therefore CN = OM = x; NP = MP - MN = MP - OC = y - c;$$

CPN என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்

$$\tan \theta = \frac{NP}{CN} = \frac{y - c}{x}$$

$$\therefore y = x \tan \theta + c$$

$$(\text{அ} - \text{து}) y = mx + c, \quad (\because m = \tan \theta)$$

இத்தொடர்பு ஆக்கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் பொருத்தும். எனவே ஆக்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + c$.

கிளை : ஆதிவழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx$ ஆகும். [$\because c = 0$]

மாதிரி 2 : x ஆயத்துடன் -80° சாய்ந்துள்ள ஒரு நேர்க்கோடு y ஆயத்தில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டின் அளவு -7 எனில் ஆக்கோட்டின் சமன்பாடு யாது?

$$\text{கோட்டின் சரிவு } m = \tan(-80) = -\tan 80 = -\sqrt{8}$$

$$y \text{ வெட்டுத்துண்டு } c = -7$$

$$\text{எனவே, கோட்டின் சமன்பாடு } y = (-\sqrt{8})x + (-7)$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \sqrt{8}x + y + 7 = 0$$

2.7. வெட்டுத்துண்டு வடிவம் (Intercept Form)

நேர்க்கோடு இரண்டு ஆள்களிலும் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது ஆக்கோட்டின் சமன்பாடு காணல்.

ஒரு தேர்க்கோடு x, y ஆயங்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்கள் மூன்றாவே a, b எனக் கொள்ளலாம். தேர்க்கோடு ஆயங்களின் A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால் $OA = a, OB = b$ ஆகும்.



படம் 15.

AB என்ற கோட்டின் சமன்பாடு காண. $P(x, y)$ அதன் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக்கொள்வோம். OP -ஐ இணைக்கவும். ஆயங்களாக்குச் செங்குத்தாக PM, PN என்ற கோடுகள் வரைய.

$$\triangle OAP + \triangle OPB = \triangle OAB$$

$$\therefore \frac{1}{2} OA \cdot MP + \frac{1}{2} OB \cdot NP = \frac{1}{2} OA \cdot OB$$

$$\frac{1}{2} ay + \frac{1}{2} bx = \frac{1}{2} ab$$

$$(அ - து) \quad ay + bx = ab$$

இருபக்கமும் ab ஆல் வகுக்க.

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

$$(அ - து) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ என்றாகும்.}$$

இத்தொடர்பு அக்கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் பொருந்தும். எனவே AB என்ற தேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

மாதிரி 3: ஒரு தேர்க்கோடு ஆயங்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகள் a, b எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண.

$$x\text{-வெட்டுத்துண்டு } a = -5$$

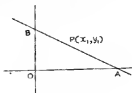
$$y\text{-வெட்டுத்துண்டு } b = 8$$

$$\text{எனவே அக்கோட்டின் சமன்பாடு } \frac{x}{-5} + \frac{y}{8} = 1$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad 8x - 5y + 80 = 0.$$

பாதி 4 : இரண்டு ஆயங்களுக்குமிடையில் கிடக்கும் பகுதியின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

ஆயங்களுக்குமிடையில் கிடக்கும் பகுதி AB எனவும், அதன் நடுப்புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனவும் கொள்ளோம்.



படம் 16.

$OA = a$, $OB = b$ எனில் A , B -யின் ஆயத் தொலைகள் $(a, 0)$, $(0, b)$ ஆகும்.

$$\therefore x_1 = \frac{a+0}{2} \quad (\text{அ} - \text{து}) \quad a = 2x_1$$

$$y_1 = \frac{0+b}{2} \quad (\text{அ} - \text{து}) \quad b = 2y_1$$

$$\text{எனவே கோட்டின் சமன்பாடு } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad \frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1$$

பாதி 5 : ஒரு கோட்டுக்கோடு $P(-4, 8)$ புள்ளி வழிச் செல்வது, இரண்டு ஆயங்களுக்குமிடையில் திரும்ப அக்கோட்டின்

பகுதியை P புள்ளி $5 : 8$ விகிதத்தில் பிரிக்குமென்றிற் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ எனக் கொள்வோம்.

அக்கோடு ஆயங்களை $(a, 0)$, $(0, b)$ புள்ளிகளில் சந்திக்கும். $(a, 0)$, $(0, b)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் பகுதியை $P(-4, 8)$ புள்ளி $5 : 8$ விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

$$\therefore -4 = \frac{5(0) + 8(a)}{5 + 8} = \frac{8a}{8} \quad (\text{அ-து}) \quad a = \frac{-8 \cdot 8}{8}$$

$$8 = \frac{5(b) + 8(0)}{5 + 8} = \frac{5b}{8} \quad (\text{அ-து}) \quad b = \frac{8 \cdot 4}{5}$$

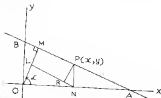
எனவே கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{-8} + \frac{y}{\frac{32}{5}} = 1 \quad (\text{அ-து}) \quad -\frac{8x}{8} + \frac{5y}{32} = 1$$

$$(\text{அ-து}) \quad 8x - 20y + 32 = 0.$$

2-8. செங்குத்து வடிவம் (Normal Form)

ஆதியிலிருந்து கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளமும், அச் செங்குத்துக் கோடு x ஆயத்துடன் பிறர் பிக்கும் கோணமும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளனவென்றிற் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.



படம் 17.

ஒரு தேர்க்கோடு ஆயங்களை A, B புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம். AB -க்குச் செங்குத்தாக OM என்ற கோடு வரையவும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை $OM = p$, $\angle XOM = \alpha$ எனக் கொள்வோம். p, α இவைகளின் சாத்திய AB என்ற கோட்டிற்குச் சமன்பாடு காணல் வேண்டும்.

AB கோட்டின் மீது $P(x, y)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக் கொள்வோம். OX -க்குச் செங்குத்தாக PN என்ற கோடும், OM -க்குச் செங்குத்தாக NL என்ற கோடும் வரலாம். P -யிலிருந்து LN -க்குச் செங்குத்தாக PR என்ற கோடு வரையலாம்.

$$\angle RNP = 90^\circ - \angle RNO = \angle NOL = \alpha.$$

செங்கோண முக்கோணம் ONL -யில் $OL = ON \cos \alpha$ (1)

செங்கோண முக்கோணம் RNP -யில் $RP = NP \sin \alpha$

$$\therefore LM = RP = NP \sin \alpha \quad (2)$$

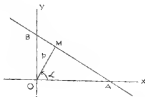
$$OM = OL + LM$$

$$\therefore p = ON \cos \alpha + NP \sin \alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

எனவே AB -யின் சமன்பாடு

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

மீத்கொடு முறை



படம் 18.

AB என்ற நேர்க்கோடு x, y ஆவங்களில் ஏற்படுத்தும் ஹெட்டுத் துண்டுகள் மூன்றையே OA, OB ஆகும்.

செங்கோண முக்கோணம் OMA -யில் $OA = OM \sec \alpha$

செங்கோண முக்கோணம் OMB -யில் $OB = OM \sec(90^\circ - \alpha)$
 $= OM \operatorname{cosec} \alpha.$

கோடு AB -யின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1 \quad (\text{வெட்டுத்துண்டு வடிவம்})$$

$$\therefore \frac{x}{OM \sec \alpha} + \frac{y}{OM \operatorname{cosec} \alpha} = 1$$

$$\frac{x}{OM} \cos \alpha + \frac{y}{OM} \sin \alpha = 1$$

$$\therefore AB\text{-யின் சமன்பாடு } x \cos \alpha + y \sin \alpha = p. \quad [\because OM=p]$$

குறிப்பு: AB என்ற கோட்டின் எல்லா திசைகளிலும் p தேர்ந்தெடுக்கப்படாததால், மேலும் கோணம் α , x ஆயத்திலிருந்து இடது சுழியாக அளக்கப்படுகிறது. இதன் மதிப்பு 0° -க்கு மேல் 90° -க்கு உட்பட்டதாக இருக்கும்.

2.8.1. $Ax + By + C = 0$ வடிவிலுள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டைச் செங்குத்து வடிவில் எழுதுதல்.

தேசிக் கோட்டின் பொது வடிவம்,

$$Ax + By + C = 0 \text{ என்போம்.} \quad (1)$$

தேசிக் கோட்டின் செங்குத்து வடிவம்,

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

$$\therefore \frac{A}{\cos \alpha} = \frac{B}{\sin \alpha} = \frac{-C}{-p} \quad (= K \text{ என்க})$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{A}{K}, \sin \alpha = \frac{B}{K}. \quad (2)$$

$$\text{எனவே } \frac{A^2}{K^2} + \frac{B^2}{K^2} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$\therefore K^2 = A^2 + B^2$ (ஆக) $K = \pm \sqrt{A^2 + B^2}$
 K -யின் மதிப்பை (2)-இல் பிரதியிட

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$-p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

எனவே $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

என்குறும்.

$\therefore Ax + By + C = 0$ -த்தின் செங்குத்து வடிவம்

$$-\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

குறிப்பு: $C < 0$ எனில் $\sqrt{A^2 + B^2}$ தேர்ந்தெடுப்போம், $C > 0$ எனில் $-\sqrt{A^2 + B^2}$ எதிர் எதிர் எடுப்போம். $C = 0$ எனில் B -யின் குறியை $\sqrt{A^2 + B^2}$ கொண்டிருக்கும்.

எடுத்து 6. $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$ சமன்பாட்டைச் செங்குத்து வடிவில் எழுதி, அது குறிக்கும் கோட்டிற்கு ஆதிக்கிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் தீர்மானம் காண்க.

$$x + \sqrt{3}y - 6 = 0\text{-த்தின்}$$

$$\text{செங்குத்து வடிவம் } \frac{x}{\sqrt{1+3}} + \frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{1+3}} - \frac{6}{\sqrt{1+3}} = 0$$

ஆகும்.

$$(\text{அத}) \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 = 0$$

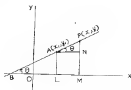
$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, p = 3$$

எனவே செங்குத்துக் கோட்டின் தீர்மானம் 3.

2-9. புள்ளி-சரிவு வடிவம் (Point-Slope Form)

கோட்டின் சரிவும், அதன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியும் கொடுக்கப் பட்டிருப்பின் கோட்டின் சமன்பாடு காணல்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி $A(x_1, y_1)$ எனவும், சரிவு $m = \tan \theta$ எனவும் கொள்வோம். கோடு AB எனவும், $P(x, y)$ அதன் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனவும் கொள்வோம்.



படம் 1B.

OX -க்குச் செங்குத்தாக AL , PN என்ற கோடுகளும்,
 PM -க்குச் செங்குத்தாக AN என்ற கோடும் வரையவும்.

$$\angle NAP = \angle XBP = \theta$$

$$AN = LM = OM - OL = x - x_1$$

$$PN = MP - MN = MP - LA = y - y_1$$

செங்கோண முக்கோணம் ANP -வில்,

$$\tan \theta = \frac{PN}{AN} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$(\text{அ-து}) \quad m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

இஃது அக் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் பொருத்தும். எனவே, AB என்ற நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

மீறிதொகு முறை

கோட்டின் சரிவு m ஆதலால், அதன் சமன்பாடு $y = mx + c$ ஆகும்.

இக்கோடு (x_1, y_1) வழிச் செல்வதால்

$$y_1 = mx_1 + c$$

$$\therefore c = y_1 - mx_1$$

எனவே கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y = mx + (y_1 - mx_1)$$

$$(\text{அ-து}) \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

2-10. இது புள்ளி வடிவம் (Two-Point Form) கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளை கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ எனக் கொண்டு AB கோட்டின் சமன்பாடு காண்போம். AB -யின் சரிவு m எனக் கொள்வோம்.

∴ A வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \dots \quad (1)$$

அக்கோடு $B(x_2, y_2)$ வழிச் செல்வதால்

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

m -யின் மதிப்பைச் சமன்பாடு (1)-இல் பிரதியிடுவர்

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

எனவே AB கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$(அ - ஆ) \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

குறிப்பு : (x_1, y_1) , (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சரிவு $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

2-11. சமச்சீர் வடிவம் (Symmetric Form)

புத்தி 2-9-இல் $A(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சரிவு $m = \tan \theta$ எனில் அதன் சமன்பாடு $y - y_1 = m(x - x_1)$ எனக் கண்டோம்.

படம் 10-இல் (புத்தி 2-9), $AP = r$ எனில்

$AN = r \cos \theta$, $NP = r \sin \theta$

$$(அ - ஆ) \quad x - x_1 = r \cos \theta, \quad y - y_1 = r \sin \theta$$

$$\therefore \frac{x - x_1}{\cos \theta} = \frac{y - y_1}{\sin \theta} = r.$$

சமன்பாட்டின் இவ் வடிவம் சமச்சீர் வடிவம் எனப்படும்.

9 சார்வுடன் $A(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் மீதுள்ள பாதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு A -யிலிருந்து உள்ள தூரம் r ஆகும்.

மாதி 7 : $A(4, 1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு x ஆவது துடர் ஏற்படுக்கும் கோணம் 135° . அக் கோடு $8x - y = 0$ என்ற கோட்டை B -யில் வெட்டினும் AB -யின் நீளத்தைக் காண்க.

AB -யின் நீளம் r எனக் கொள்க.

$A(4, 1)$ வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-4}{\cos 135} = \frac{y-1}{\sin 135} = r$$

$$(அ-து) \quad \frac{x-4}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-1}{+\frac{1}{\sqrt{2}}} = r$$

$$\therefore x = 4 - \frac{r}{\sqrt{2}}, y = 1 + \frac{r}{\sqrt{2}}$$

எனவே B -யின் ஆவத்தொலைகள் $\left(4 - \frac{r}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$

புள்ளி B , $8x - y = 0$ கோட்டின் மீதுள்ளதால்

$$8\left(4 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - \left(1 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\therefore -\frac{4r}{\sqrt{2}} + 11 = 0$$

$$\therefore r = \frac{+11\sqrt{2}}{4}$$

எனவே AB -யின் நீளம் $\frac{11\sqrt{2}}{4}$

2-12. தேர்க்கோட்டின் பொதுச் சமன்பாடு (Standard Equation)

$Ax + By + C = 0$ என்ற சமன்பாடு எப்பொழுதும் ஒரு தேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$Ax + By + C = 0$ குறிக்கும் நியம்பாதையே (Locus) (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) என்பவை எவையெனும் மூன்று புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore Ax_1 + By_1 + C = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0$$

$$Ax_3 + By_3 + C = 0$$

இச் சமன்பாடுகளை ஒன்றையே $(y_2 - y_3)$, $(y_3 - y_1)$, $(y_1 - y_3)$ என்பவையால் பெருக்கிப் பின் கூட்டினால்

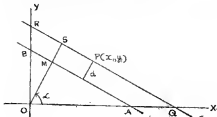
$$A[x_1(y_3 - y_3) + x_2(y_2 - y_1) + x_3(y_1 - y_3)] = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$A \neq 0$. $\therefore x_1(y_3 - y_3) + x_2(y_2 - y_1) + x_3(y_1 - y_3) = 0$. (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் மையம் பூச்சியானாகும்.

எனவே, ஆம் மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளன. (அ - து) $Ax + By + C = 0$ குறிக்கும் நியம்பாதையின் மீதுள்ள யாதேனும் மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைவும்.

$\therefore Ax + By + C = 0$ எப்பொழுதும் ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

2-13. $Ax + By + C = 0$ கோட்டிற்கு $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்.



படம் 20.

$Ax + By + C = 0$ குறிக்கும் கோடு AB எனவும், $P(x_1, y_1)$ வழி AB -க்கு இணையாகச் செல்லும் கோடு QR எனவும் கொள்வோம்.

AB -க்குச் செங்குத்தாக ஆதிவீழ்கிறது வரையும்கோடு AB -ஐ M -யிலும், QR -ஐ S -யிலும் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம்.

$OS = p'$, $OM = p$, $\angle XOM = \alpha$ என்போம்.

$\therefore AB$ -யின் சமன்பாடு $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ ஆகும். AB -யின் சமன்பாடு, $Ax + By + C = 0$.

$$\therefore \frac{\cos \alpha}{A} = \frac{\sin \alpha}{B} = -\frac{p}{C} = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$-p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

மேலும் QR -யின் சமன்பாடு $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p' = 0$, இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்வதால் $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p' = 0$.

$$\therefore p' = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha$$

P -யிலிருந்து $Ax + By + C = 0$ கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் d எனின்,

$$\begin{aligned} d &= OS - OM = p' - p \\ &= x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p \\ &= \frac{Ax_1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By_1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $Ax + By + C = 0$ கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்,

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \text{ ஆகும்.}$$

இதன் : ஆதிவீழ்கிறது $Ax + By + C = 0$ கோட்டிற்கு

$$\text{உள்ளூரம்} \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

குதிர்பு: ஆதியும், (x_1, y_1) புள்ளியும் கோட்டிற்கு எதிர் பக்கங்களிலிருப்பின் d நேர் மதிப்பும், கோட்டிற்கு ஒரே பக்கத்திலிருந்தால் எதிர் மதிப்பும் கொண்டிருக்கும். ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் நேர் மதிப்புடையது.

மாதிரி 8: $(-8, -4)$ புள்ளியிலிருந்து $3x + 4y - 10 = 0$ கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் காண்க.

$$\text{நீளம் } d = \frac{3(-8) + 4(-4) - 10}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{-85}{5} = -17$$

\therefore செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் 17

$d < 0$ ஆதலால் ஆதியும், $(-8, -4)$ புள்ளியும் நேர் கோட்டிற்கு ஒரே பக்கத்திலுள்ளன.

மாதிரி 9: $(2, 3)$ புள்ளியிலிருந்து $5x - 12y + 8 = 0$ கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் காண்க.

$$\text{நீளம் } d = \frac{5(2) - 12(3) + 8}{-\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{-28}{-13} = \frac{28}{13}$$

\therefore செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் = $\frac{28}{13}$.

$d > 0$ ஆதலால் ஆதியும் $(2, 3)$ புள்ளியும் கோட்டின் எதிர் பக்கங்களிலிருக்கும்.

பயிற்சி 2.1.

1. y ஆயத்தில் 4 அலகு வெட்டுத்துண்டு ஏற்படுத்தும் ஒரு நேர்க்கோடு x ஆயத்துடன் மீறப்படுக்கும் கோணம் -50° எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
2. y ஆயத்தில் -8 அலகு வெட்டுத்துண்டு ஏற்படுத்தும் ஒரு கோடு x ஆயத்துடன் மீறப்படுக்கும் கோணம் 135° எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
3. செவ்வகம் கோடுகளின் சரிவையும், y வெட்டுத்துண்டு கணியும் காண்க:

$$(i) \quad 8x + 2y - 9 = 0$$

$$(ii) \quad 8x + 6y - 7 = 0$$

$$(iii) \quad 8x - 2y - 8 = 0$$

$$(iv) \quad 6x = 7y + 12$$

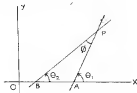
4. $y = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 4$, $y = \sqrt{3}x + 8$ கோடுகள் x ஆயத் துடன் பிறப்பிக்கும் கோணங்களைக் காண்க. இக்கோடுகளுக்கிடையிட்ட கோணம் யாது?
5. ஒரு தேக்கோடு x, y ஆயங்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே 3, 4 எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
6. ஒரு கோடு ஆயங்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகள் 5, -4 எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு என்ன?
7. (1, -8) புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒரு தேக்கோடு ஆயங்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகளின் பெருக்குத் தொகை 8 எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
8. ஒரு கோடு x ஆயத்தை A புள்ளியிலும், y ஆயத்தை B புள்ளியிலும் வெட்டுகிறது. AB -யின் நடுப்புள்ளி $(-2, -4)$ எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
9. இரண்டு ஆயங்களுக்கிடையேயுள்ள ஒரு தேக்கோட்டின் பகுதியை $(4, -8)$ புள்ளி $4:5$ விகிதத்தில் பிரித்தால் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
10. ஒரு கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p . செங்குத்துக்கோடு x ஆயத்துடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் α எனில், பின்வரும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
 - (i) $p = 2$, $\alpha = 45^\circ$
 - (ii) $p = 3$, $\alpha = 150^\circ$
11. பின்வரும் சமன்பாடுகளைச் செங்குத்து வடிவில் எழுதி p, α காண்க.
 - (i) $x + y - \sqrt{2} = 0$
 - (ii) $x + y - 2\sqrt{2} = 0$
 - (iii) $\sqrt{3}x - y + 6 = 0$.
12. $2x + ky - 5 = 0$ என்ற கோடு $(1, 1)$ புள்ளி வழிச் செல்லின் k -யின் மதிப்புக் காண்க.
13. $(-4, -8)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சரிவு 2 எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

14. $A(-2, 5)$, $B(3, -4)$, $C(7, 10)$ என்ன $\triangle ABC$ -யின் பக்கங்கள், மையக்கோடுகள் ஆகியவைகளின் சமன் பாடுகளைக் காண்க.
15. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன் பாட்டையும், சரிமையும் காண்க.
- (i) $(0, 0)$, $(5, 3)$; (ii) $(3, 0)$, $(0, 4)$;
(iii) $(-5, 2)$, $(-4, 2)$.
16. $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ என்ற கோடு ஆயங்களை A , B புள்ளிகளில் லைட்டானும், AB -யின் நடுப்புள்ளி யின் இயங்கு வழிக் காண்க. (p ஒரு மாறிய்).
17. $3x - 2y + 7 = 0$ கோட்டிற்கு இணையாக $(1, 2)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
18. $2x - 3y + 8 = 0$ கோடு, $P(i+1, i)$ புள்ளி வழிச் சென்றும், i -யின் மதிப்புக் காண்க. P -யின் ஆயத் தொகை யாவது?
19. $(1, -3)$, $(-1, -5)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை $(7, 8)$ புள்ளி பிரிக்கும் விதிதம் என்ன?
20. $(-3, 1)$ புள்ளியிலிருந்து $3x - 4y - 2 = 0$ கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் காண்க.
21. $(2, -8)$ புள்ளியிலிருந்து $4x + 3y + 9 = 0$ கோட்டிற்கு உண் தூரம் காண்க.
22. $3x + 4y - 12 = 0$, $3x + 4y - 8 = 0$ கோடுகளுக் கிடையேயுள்ள தூரம் காண்க.
23. $3x - y + 4 = 0$, $3x - y + 2 = 0$ கோடுகளுக் கிடையேயுள்ள தூரம் காண்க.
24. $5x + 7y - 20 = 0$ கோட்டிற்கு $(2, 3)$, $(1, 2)$ புள்ளிகளிலிருந்து உண் தூரங்களைக் காண்க. இருபுள்ளிகளும் அக்கோட்டிற்கு இருபக்கங்களிலுள்ளன என நிறவுக.
25. $(1, -8)$ புள்ளி, $4x + 7y - 18 = 0$ கோட்டிற்குக் கீழுள்ளது என நிறவுக.

விடைகள்

1. $\sqrt{2}x + y - 4 = 0$. 2. $x + y + 8 = 0$. 3. (i) $m = -\frac{8}{2}$;
 $c = \frac{8}{2}$. (ii) $m = -\frac{1}{2}$; $c = \frac{7}{8}$. (iii) $m = 4$; $c = -\frac{8}{2}$.
 (iv) $m = \frac{8}{7}$; $c = -\frac{12}{7}$. 4. $30^\circ, 90^\circ, 30^\circ$. 5. $4x + 8y$
 $= 12$. 6. $4x - 6y = 20$. 7. $2x + y + 4 = 0$; $16x + y$
 $- 12 = 0$. 8. $2x + y + 8 = 0$. 9. $15x - 16y = 108$.
 10. (i) $x + y = 2\sqrt{2}$. (ii) $\sqrt{2}x - y + 6 = 0$. 11. (i) $p = 1$;
 $\alpha = 45^\circ$. (ii) $p = 2$; $\alpha = 45^\circ$. (iii) $p = 4$; $\alpha = 150^\circ$. 12. 3.
 13. $2x - y + 5 = 0$. 14. பக்கங்கள்: $2x + 5y = 7$, $7x - 2y = 22$,
 $5x - 8y + 55 = 0$. அமைக்கோடுகள்: $2x + 7y = 31$,
 $15x + y = 41$, $12x - 13y = 6$. 15. (i) $2x - 5y = 0$, $m = \frac{2}{5}$.
 (ii) $2x + 3y - 12 = 0$, $m = -\frac{2}{3}$. (iii) $y - 2 = 0$, $m = 0$.
 16. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2}$. 17. $3x - 2y + 1 = 0$. 18. $t = 5$,
 (6, 5). 19. 3 : 4. 20. -5. 21. $-\frac{8}{6}$. 22. $\frac{8}{6}$.
 23. $\frac{8}{\sqrt{10}}$.

2.14. இது கோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காட்டும்



படம் 21.

$$y = m_1x + c_1 \quad \dots \quad (1)$$

$$y = m_2x + c_2 \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கோடுகள் மூன்றையுமே PA PB எனக் கொள்வோம். கோடுகள் (1), (2) x ஆகத்தடிக் குறப்படுக்கும் கோணம் மூன்றையுமே θ_1, θ_2 எனில்,

$$m_1 = \tan \theta_1, m_2 = \tan \theta_2$$

ஆக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் ϕ எனில்,

$$\angle BPA = \phi = \theta_1 - \theta_2$$

$$\therefore \tan \phi = \tan (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

$$(அ-ஆ) \quad \tan \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore \phi = \tan^{-1} \left[\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right]$$

குறிப்பு : இரு கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் குறுங் கோணமெனில் $\tan \phi$ நேர் மதிப்பும், விரி கோணமெனில் அடிகு எதிர் மதிப்பும் கொண்டிருக்கும்.

கிளை 1 : இவ்விரு கோடுகளும் இணைகோடுகளெனில் இவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம் $\phi = 0$, $\therefore \tan \phi = 0$, எனவே, $m_1 = m_2$. (அ-ஆ) இணையாகக் செல்லும் கோடுகளின் சரிவுகள் சமம்.

கிளை 2 : இவ்விரு கோடுகளும் செங்குத்துக் கோடுகளெனில் இவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம் $\phi = 90^\circ$.

$$\therefore \tan \phi = \infty, \text{ எனவே } m_1 m_2 = -1.$$

(அ-ஆ) நம்முள் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும் இரு கோடுகளின் சரிவுகள்தம் பெருக்குத் தொகை -1 ஆகும்.

$$2.15. \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

என்பவை இணையாகக் செல்லும் இரு கோடுகளெனில் அவற்றின் சரிவுகள் சமம்.

$$\therefore \frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2} \quad (அ-ஆ) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

இவ்விரு கோடுகளும் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளுமெனில் இவைகள்தம் சரிவுகளின் பெருக்குத் தொகை -1 .

$$\therefore \left(\frac{-a_1}{b_1} \right) \left(\frac{-a_2}{b_2} \right) = -1$$

$$(அ-து) \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.$$

வினா : இரு கோடுகளின் சமன்பாட்டில் எண்ணுறுபடி மட்டும் வேறுபடின், அவை இணைகோடுகளாகும்.

$$ax + by + c = 0, \quad ax + by + d = 0$$

என்பவை இரண்டு இணைகோடுகளின் சமன்பாடுகளாகும்.

$ax + by + c = 0, \quad bx + ay + d = 0$ கோடுகள் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும்.

எடுத்து 10: $4x - 3y = 10$ கோட்டிற்கிணையாக $(2, 8)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

$4x - 3y = 10$ கோட்டிற்கு இணையாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$4x - 3y = K \text{ ஆகும்.}$$

இது $(2, 8)$ வழிச் செல்கின்,

$$4(2) - 3(3) = K$$

$$\therefore K = 1.$$

எனவே கோட்டின் சமன்பாடு

$$4x - 3y + 1 = 0.$$

எடுத்து 11 : $4x - 3y = 10$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக $(2, 8)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

$4x - 3y = 10$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோடு

$$3x + 4y = K \text{ ஆகும்.}$$

இது $(2, 8)$ வழிச் செல்கின் $3(2) + 4(8) = K$

$$\therefore K = 18$$

எனவே கோட்டின் சமன்பாடு $3x + 4y - 18 = 0$.

2-16. இரு கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

என்ற இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

இப் புள்ளி இரு கோடுகளுக்கும் பொதுவான புள்ளியாதலால் அக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளுக்கும் (x_1, y_1) பொருத்தும்.

$$\therefore a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0$$

$$a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 = 0$$

குறுக்குப் பெருக்கல் விதிப்படி.

$$\frac{x_1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y_1}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$\therefore x_1 = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, y_1 = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

குறிப்பு : $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ (அ-து) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_2}{b_1}$ எனில் அங்
னிரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி கத்தழிவிலிருக்கும். இக் கட்டுப்
பாட்டுக்குட்பட்ட இரு கோடுகள் இரண்டு கோடுகள் எனப் பற்றி
2-16-இல் கண்டோம். எனவே இரண்டு கோடுகள் கத்தழியில்
(Infinity) வெட்டும்.

2-17 லுள்ளது கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லத் தேவையான
கட்டுப்பாடு.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

என்பவை மூன்று கோடுகள் எனக் கொள்வோம்.

கோடுகள் (1), (2) வெட்டும் புள்ளி,

$$\left[\frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right]$$

கோடு (3) இப் புள்ளி வழிச் செல்வின்

$$a_3 \left(\frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right) + b_3 \left(\frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right) + c_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) + b_3 (c_1 a_2 - c_2 a_1) \\ + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0. \end{aligned}$$

மாதிரி 12: $2x - 3y = 7$, $3x - 4y = 18$, $8x - ky = 88$
என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லின் k -யின் மதிப்பு
என்ன?

$$2x - 3y = 7, 3x - 4y = 18$$

என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (11, 5).

$$8x - ky = 88 \text{ இப் புள்ளி வழிச் செல்லின்}$$

$$8(11) - k(5) = 88$$

$$88 - 88 = 5k \quad \therefore k = 11.$$

2.18. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ கோடுகள்
வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு
காண்க.

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda (a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

(1)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$x(a_1 + \lambda a_2) + y(b_1 + \lambda b_2) + (c_1 + \lambda c_2) = 0$$

இது $Ax + By + C = 0$ வடிவிலிருப்பதால் (1) ஒரு தேர்ச்சோட்டைக் குறிக்கும்.

மேலும் (x_1, y_1) என்ற புள்ளி

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0; a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$$

என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி எனில்

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$$

$$a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$$

$$\therefore (a_1x_1 + b_1y_1 + c_1) + \lambda (a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) = 0$$

$$(அ - து) (a_1x + b_1y + c_1) + \lambda (a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

என்னும் சமன்பாடு (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும்.

எனவே $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு.

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda (a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

இங்கு λ என்பது ஒரு மாறிலியாகும்.

மாதிரி 13 : $3x - 4y = 7$, $12x + 5y = 18$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு $2x - 3y + 5 = 0$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவுள்ளதெனின் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

$$3x - 4y - 7 = 0, \quad 12x + 5y - 18 = 0$$

கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு

$$(3x - 4y - 7) + \lambda (12x + 5y - 18) = 0 \quad (1)$$

$$(அ-து) \quad x(3 + 12\lambda) + y(-4 + 5\lambda) + (-7 - 18\lambda) = 0.$$

$$\text{இக் கோட்டின் சரிவு} = -\frac{3 + 12\lambda}{5\lambda - 4}$$

$$2x - 3y + 5 = 0 \text{ த்தின் சரிவு } = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore \left(-\frac{12\lambda + 3}{5\lambda - 4} \right) \left(\frac{2}{3} \right) = -1$$

$$\text{எனவே, } 2(12\lambda + 3) - 3(5\lambda - 4) = 0$$

$$24\lambda + 6 - 15\lambda + 12 = 0$$

$$9\lambda + 18 = 0 \quad \therefore \lambda = -2.$$

இதை (1)-இல் பிரதியிடின்

$$(3x - 4y - 7) - 2(12x + 5y - 18) = 0$$

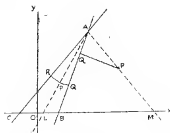
$$(அ-து) \quad 21x + 14y - 19 = 0.$$

2-19. இரு கோடுகளின் இடைவெளியைக் காணத்தின் இரு சம வெட்டிகள் காண்க.

இரு கோடுகள் AB , AC எனவும், அவைகளின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ எனவும் கொள்வோம்.}$$



படம் 32.

AL , AM முறையே கோணம் BAC -யின் உள்வீது வெளிவீது சம செங்கோணக் கோணங்கள்.

சம செங்கோணம் P யாதேனும் ஒரு புள்ளி. P -யிலிருந்து கோணம் (1), (2) யிட்டு PQ , PR என்ற செங்கோணக் கோணங்கள் வரப்படும்.

$$\triangle PAR = \triangle PAQ$$

$$\therefore PQ = PR$$

P -யின் ஆவத் தொலைவு (x_1, y_1) எனில், PQ , PR என்ற கோணங்களின் தளங்களின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \quad \frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

இவைகளின் சமம்.

$$\text{எனவே } \frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$\therefore (x_1, y_1)$ இன் இயங்கு வழி (அ-து) உள்வீது, வெளிவீது, சம செங்கோணம் சமன்பாடு

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

c_1, c_2 இரண்டும் ஒரே குறியைக் கொண்டுள்ளன எனக் கொள்வோம். (இரண்டும் மாறுபட்ட குறிகளைக் (signs) கொண்டிருப்பினும் ஒரே குறியைக் கொண்டிருக்குமாறு சமன்பாடுகளை மாற்றி எழுதலாம்).

ஆதிசய உள்ளடக்கிய கோணத்தின் இரு சம வெட்டி மீது P புள்ளி இருப்பின், P புள்ளியும் ஆதிசய ஆக் கோடுகளுக்கு ஒரே பக்கத்திலிருக்கும். எனவே PQ, PR இரண்டும் ஒரே குறியைக் கொண்டிருக்கும். எனவே அச் சமவெட்டியின் சமன்பாடு

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = + \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

P மீறிதொகு சமவெட்டியின் மீதிருப்பின் PQ, PR இரண்டும் மாறுபட்ட குறிகளைக் கொண்டிருக்கும். எனவே அச் சமவெட்டியின் சமன்பாடு

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = - \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

எனவே 14. $12x + 5y - 4 = 0$, $8x + 4y + 7 = 0$ என்ற கோடுகளின் இடைவெடியுள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகளை காண்க.

$$\begin{aligned} \text{கோடுகள் } 12x + 5y - 4 &= 0 \\ -8x - 4y - 7 &= 0 \end{aligned}$$

\therefore ஆதிசய உள்ளடக்கிய கோணத்தின் இரு சம வெட்டி

$$\frac{12x + 5y - 4}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{-8x - 4y - 7}{\sqrt{64 + 16}}$$

இதைச் சுருக்கி $88x + 77y + 71 = 0$ என்றும்.

மீறிதொகு சமவெட்டி

$$\frac{12x + 5y - 4}{\sqrt{144 + 25}} = - \frac{-8x - 4y - 7}{\sqrt{64 + 16}}$$

இதைச் சுருக்கி $7x - 8y - 87 = 0$ என்றும்.

எனவே இரு சமவெட்டிகளின் சமன்பாடுகள்

$$88x + 77y + 71 = 0$$

$$7x - 8y - 87 = 0.$$

பயிற்சி 2.2.

1. $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 4$, $y = \sqrt{3}x + 8$ என்ற இரு கோடுகள் x ஆயத்தின் மீறப்பிக்கும் கோணங்களைக் காண்க. அப்பகு கோடுகளில் இடைப்பட்ட கோணம் என்ன?
2. $y = (2 - \sqrt{3})x + 5$, $y = (2 + \sqrt{3})x - 7$ என்ற கோடுகளின் இடைவேயுள்ள கோணம் என்ன?
3. $5x + 3y - 15 = 0$, $18x - 5y = 81$ என்ற கோடுகள் தலிழன் செய்தத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும் என நிறவுக.
4. $5x + 3y - 8 = 0$ கோட்டிற்கு இணையாக (2, 3) புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
5. $3x - 5y = 21$ கோட்டிற்கு இணையாகச் செல்லும் ஒரு கோடு x ஆயத்தில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டின் அளவு -7 எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
6. (2, 5) புள்ளி வழி $2x + 5y + 31 = 0$ கோட்டிற்குச் செல்ந்தாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
7. $5x - y = 8$, $x + 6y - 8 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியை (3, 4) புள்ளியுடன் செக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
8. $3x - 8y + 4 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு $6x - 7y + 8 = 0$ கோட்டிற்கு இணையாக உள்ளதெனில் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
9. $x + 3y - 1 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கோடு $3x + 4y = 0$ கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கிறதெனில் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
10. $3x + y - 2 = 0$, $ax + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 2 = 0$ கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லுமெனின் a -யின் மதிப்பு என்ன?
11. a -யின் எம்மதிப்பிற்கு $x - 3y + a = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$, $x + 4y + 1 = 0$ கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும்?
12. $x + 2y = 0$, $4x + 3y = 5$, $3x + y = 0$ கோடுகளால் அமைபும் முக்கோணத்தில் குத்துக் கோட்டுச் சந்திப்பை (orthocentre), மையக்கோட்டுச் சந்திப்பை (centroid) காண்க.

13. ஆதிவீர்த்து ஒரு கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி $(8, -4)$ எனில், அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
14. $11x + 7y - 8 = 0$ என்ற கோட்டை மூலம் விட்டமரக்க கொண்ட ஓர் இணைகூற்றின் அடுத்தடுத்த இரு பக்கங்கள் $4x + 6y = 0$, $7x + 2y = 0$ எனில் மற்றொரு பக்கங்களையும், மூலம் விட்டத்தையும் காண்க.
15. $(-4, 10)$, $(4, -10)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மையக்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
16. AB என்ற கோட்டின் சரிவு $\frac{8}{3}$. அதன் y வெட்டுத் துண்டு B . AB -க்குச் செங்குத்தாக $(-4, 21)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க. இயற்கு கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளி யாது? AB கோட்டிலிருந்து $(-4, 21)$ புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் காண்க.
17. ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக் கோடுகள் (altitudes) ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.
18. ஒரு முக்கோணத்தின் மையக் குத்துக் கோடுகள் (perpendicular bisectors) ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.
19. (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒரு கோடு $y = mx + c$ கோட்டுடன் சீரமைக்கும் கோணம் $\tan^{-1}(m)$ எனில் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
20. $x \sec \theta + y \operatorname{cosec} \theta = a$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோடு $(a \cos^2 \theta, a \sin^2 \theta)$ புள்ளி வழிச் செல்லின் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
21. $yy_1 = 2a(x + x_1)$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோடு (x_1, y_1) வழிச் செல்லின் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
22. $ax + by + c = 0$, $lx + my + n = 0$, $px + qy + r = 0$ கோடுகளையெல்லாம் மூக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டுச் சத்தி வழிச் செல்லும் கோடு $\frac{ax+by+c}{ap+bq} = \frac{lx+my+n}{lp+mq}$ என நிறுவுக.
23. $ax + by + c = 0$, $ax + by + c' = 0$, $a_1x + b_1y + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ என்ற கோடுகளால் அமைப இணை

கரத்தின் மூலம் விட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுமெனில் $a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2$ என நிறுவுக.

24. $4y - 3x = 1$, $8y - 4x + 1 = 0$, $4y - 3x = 3$, $8y - 4x + 2 = 0$ கோடுகளாலமையும் இணைகரத்தின் மரபுக் காண்க.

25. $8x + 4y = 7a$, $8x + 4y = 7b$, $4x + 8y = 7c$, $4x + 8y = 7d$ என்ற கோடுகளாலமையும் இணைகரத்தின் மரபுக் காண்க.

26. $8x - 4y + 7 = 0$, $12x - 5y = 8$ கோடுகளின் இடைமேயுள்ள கோணத்தின் சமவெட்டிகளைக் காண்க.

27. $8x + 4y = 8$, $12x - 5y = 3$, $4x - 8y + 12 = 0$ பக்கங்களைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் உள்வட்டமையும் (incentre) காண்க.

28. $8x + 4y - 6 = 0$, $12x - 5y - 3 = 0$, $4x - 8y + 12 = 0$ கோடுகளாலமையும் முக்கோணத்தின் கோணங்களின் உள்ளிரு சமவெட்டிகளைக் காண்க.

29. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் உள்ளிரு சமவெட்டிகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

30. $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ கோடுகளாலமையும் முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் காண்க.

விடைகள்

1. 80° , 60° , 80° . 2. 60° . 4. $5x + 8y = 24$.
5. $8x - 8y + 21 = 0$. 6. $5x - 2y = 0$. 7. $3x - y - 5 = 0$.
8. $102x - 118y + 180 = 0$. 9. $3x + 4y + 2 = 0$. 10. 6.
11. 5. 12. $(-4, -8)$; $\left(\frac{1}{8}, \frac{9}{8}\right)$. 13. $8x - 4y - 25 = 0$.
14. $7x + 8y - 9 = 0$, $4x + 5y + 9 = 0$, $x - y = 0$.
15. $2x - 5y = 0$. 16. $8x + 9y = 20$; $(8, 8)$; $65\sqrt{18}$.
17. $(1 - \cos^2 \theta) (y + y_1) = 2a (x - x_1)$; $y - y_1$. 18. $x \cos \theta - y \sin \theta = a \cos \theta$.
19. $2a (y - y_1) + y_1 (x - x_1) = 0$.
20. $\frac{9}{7}$. 21. $7(a - b)(c - d)$. 22. $99x - 77y + 51 = 0$;
23. $21x + 27y - 181 = 0$. 24. $\left(\frac{11}{48}, \frac{125}{48}\right)$. 25. $88x + 9y - 81 = 0$, $112x - 64y + 141 = 0$, $7y - x = 18$. 26. $(1, 1)$.

3. இரட்டைக் கோடுகள் (Pairs of Straight lines)

3.1. n படிச் சமபடித்தான சமன்பாடு (Homogeneous Equation of degree n) ஆடுவதில் செல்லும் n கோடுகளாக குறிக்கும்

n படிச் சமபடித்தான சமன்பாடு.

$$a_0 x^n + a_1 y^{n-1} x + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 0 \quad \dots (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இரு பக்கமும் x^n ஆல் வகுக்க,

$$a_0 \frac{y^n}{x^n} + a_1 \frac{y^{n-1}}{x^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{y}{x} + a_n = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad a_0 \left(\frac{y}{x} \right)^n + a_1 \left(\frac{y}{x} \right)^{n-1} + \dots \\ + a_{n-1} \left(\frac{y}{x} \right) + a_n = 0. \quad \dots (2) \end{aligned}$$

இது $\left(\frac{y}{x} \right)$ மாறிலியில் n படிச் சமன்பாடு ஆதலால் n தீர்வுகள் கொண்டுள்ளும். அவைகள் m_1, m_2, \dots, m_n எனில் (2)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$a_0 \left(\frac{y}{x} - m_1 \right) \left(\frac{y}{x} - m_2 \right) \dots \left(\frac{y}{x} - m_n \right) = 0$$

$$\text{(அ-து)} \quad a_0 (y - m_1 x) (y - m_2 x) \dots (y - m_n x) = 0 \quad \dots (3)$$

$$\therefore y - m_1 x = 0, y - m_2 x = 0, \dots, y - m_n x = 0.$$

இவை ஒவ்வொன்றும் ஆதி வர்தச் செல்லும் ஒரு, நேரிக் கோட்டைக் குறிக்கும்.

எனவே n படிச் சமன்படுத்தான சமன்பாடு ஆதி வழிச் செல்லும் n நேர்க் கோடுகளாக் குறிக்கும்.

3-2. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்படுத்தான சமன்பாடு ஆதி வழிச் செல்லும் இரு நேர்க் கோடுகளாக் குறிக்கும்.

$$\begin{aligned} ax^2 + 2hxy + by^2 &= b \left(y^2 + \frac{2h}{b} xy + \frac{a}{b} x^2 \right), \quad b \neq 0 \\ &= b (y - m_1 x) (y - m_2 x) \quad \dots (1) \end{aligned}$$

எனவே கோடுகளின் தனித் தனிச் சமன்பாடு

$$y - m_1 x = 0, \quad y - m_2 x = 0 \text{ ஆகும்.}$$

மேலும்,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = b [y^2 - (m_1 + m_2) xy + m_1 m_2 x^2] \quad (2)$$

$$\therefore \quad m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} = -\frac{xy\text{-இன் கெழு}}{y^2\text{-இன் கெழு}}$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{b} = \frac{x^2\text{-இன் கெழு}}{y^2\text{-இன் கெழு}}$$

சித்தொரு முறை

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ சமன்பாட்டை y -இல் இருபடிச் சமன்பாட்டாகக் கொண்டால்,

$$y = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - ab}}{b} x$$

இச்சமன்பாடுகளினாலும் ஆதி வழிச் செல்லும் இருகோடுகளாக் குறிக்கும்.

$h^2 - ab < 0$, எனில் இரண்டும் கற்பனைக் கோடுகள் (imaginary lines).

$h^2 - ab = 0$ எனில், இவை இரண்டும் ஒன்றுபடும் கோடுகள் (coincident lines).

$h^2 - ab > 0$ எனில், இரண்டும் வெப்பமான கோடுகள் (real lines).

3.3. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் இரு கோடுகளின் இடைபெயர்வுள்ள கோணம் காணல்.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

குறிக்கும் இரட்டைக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள்

$$y - m_1x = 0, \quad y - m_2x = 0 \text{ எனில்,}$$

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, \quad m_1 m_2 = \frac{a}{b}.$$

இரட்டைக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் ϕ எனில்,

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \\ &= \frac{\pm \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{1 + m_1 m_2} \\ &= \frac{\pm \sqrt{\frac{4h^2}{b^2} - \frac{4a}{b}}}{1 + \frac{a}{b}} \\ &= \frac{\pm 2 \sqrt{h^2 - ab}}{a + b} \\ \therefore \tan \phi &= \frac{\pm 2 \sqrt{h^2 - ab}}{a + b} \end{aligned}$$

மிகைக்குறி (positive sign) கோடுகளின் இடைபெயர்வுள்ள குறுவ் கோணத்தையும், குறைக் குறி (negative sign) விரிகோணத்தையும் கொடுக்கும்.

உதா 1. $h^2 - ab = 0$ எனில், $\tan \phi = 0$. $\therefore \phi = 0$. எனவே கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் பூச்சியம், இரு கோடுகளும் ஆதிவழிச் செல்பவை வாதனின் இரண்டும் ஒன்றுபடும் கோடுகளாகும்.

உதா 2. $a + b = 0$ எனில், $\tan \phi = \infty$. $\therefore \phi = 90^\circ$. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக்கோடுகள் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தானவை.

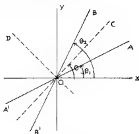
3.4. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ருதிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகள் காண்க.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ருதிக்கும் கோடுகள் AOA' , BOB' எனக்கொள்வோம். இவைகளின் தனித்தனிக் சமன்பாடு $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ எனில்,

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{b}.$$

இக் கோடுகள் x ஆயத்துடன் சேர்பிக்கும் கோணங்கள் θ_1 , θ_2 எனில், $m_1 = \tan \theta_1$, $m_2 = \tan \theta_2$.



படம் 28.

ஆக் கோடுகளின் இடைவெள்ளக் கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகள் OC , OD எனக் கொள்வோம். இவை x ஆயத்துடன் சேர்பிக்கும் கோணம் ϕ எனில்,

$$\phi = \angle XOC \text{ (அ-து) } \angle XOD$$

$$\angle XOC = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\angle XOD = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi + \theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (\text{அ-து}) \quad \frac{\pi + \theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\therefore 2\theta = \theta_1 + \theta_2 \quad (\text{அ-து}) \quad \pi + \theta_1 + \theta_2$$

$$\text{எனவே } \tan 2\theta = \tan (\theta_1 + \theta_2).$$

$$\begin{aligned} (\text{அ-து}) \quad \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} &= \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} \\ &= \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2} = \frac{2k}{a - b}. \quad \dots \quad (i) \end{aligned}$$

$P(x, y)$ என்பது OC ஆகலது OD என்ற இரு சமவெட்டிகளின் மீதுள்ள வாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின்,

$$\tan \theta = \frac{y}{x}.$$

\therefore சமன்பாடு (1)

$$\frac{2 \frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{2k}{a - b} \quad \text{என்றும்.}$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2k}{a - b} \quad (\text{அ-து}) \quad \frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{k}$$

எனவே இரு சம வெட்டிகளின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{k}.$$

மீதிதொகு முறை

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குதிக்லும் இரட்டைக் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள் $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ எனின் $m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$, $m_1 m_2 = \frac{a}{b}$.

இரு சம வெட்டிகளின் மீதுள்ள புள்ளியிலிருந்து அக் கோடு களுக்கு வரைவும் செங்குத்துக் கோடுகளின் எண்ணளவு சமனாதவின்,

$$\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \pm \frac{y - m_2 x}{\sqrt{1 + m_2^2}}.$$

இதில் மிகைக் குறி ஒரு சம வெட்டியைவரும், குறைத்தல் குறி குறிதொகு சம வெட்டியைவரும் குறிக்கும்.

இரண்டு பக்கங்களைவரும் வர்க்கப்படுத்தி,

$$\frac{(y - m_1 x)^2}{1 + m_1^2} = \frac{(y - m_2 x)^2}{1 + m_2^2},$$

இதைச் சுருக்கிச்,

$$(1 + m_2^2)(y - m_1 x)^2 = (1 + m_1^2)(y - m_2 x)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2 [m_1^2 (1 + m_2^2) - m_2^2 (1 + m_1^2)] \\ - 2xy [m_1 (1 + m_2^2) - m_2 (1 + m_1^2)] \\ + y^2 [(1 + m_2^2) - (1 + m_1^2)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 (m_1^2 - m_2^2) - 2xy [(m_1 - m_2) (1 + m_1 m_2)] \\ + y^2 (m_2^2 - m_1^2) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{(அ.து)} \quad (m_1 - m_2) [x^2 (m_1 + m_2) - 2xy (1 + m_1 m_2) - y^2 (m_1 + m_2)] = 0.$$

$$m_1 - m_2 \neq 0. \therefore (x^2 - y^2) (m_1 + m_2) - 2xy (1 + m_1 m_2) = 0.$$

$$(x^2 - y^2) \left(-\frac{2h}{b} \right) - 2xy \left(1 - \frac{a}{b} \right) = 0$$

$$\therefore (x^2 - y^2) h = xy(a - b)$$

$$\text{(அ.து)} \quad \frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}.$$

எனவே, கோணச் சம வெட்டிகளின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}.$$

எனவே: $33x^2 - 71xy - 14y^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள் காண்க. இவைகளின் இடைவெயுள்ள கோணம் என்ன?

$33x^2 - 71xy - 14y^2 = (11x + 2y)(3x - 7y)$. எனவே, கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள்

$$11x + 2y = 0, \quad 3x - 7y = 0.$$

இடைவெயுள்ள கோணம் ϕ எனில், $\tan \phi = \frac{\pm 2 \sqrt{h^2 - ab}}{a+b}$

$$\begin{aligned}\therefore \tan \phi &= \frac{\pm 2 \sqrt{\left(-\frac{71}{2}\right)^2 - 88(-14)}}{22 + (-14)} \\ &= \frac{\sqrt{5041 + 1232}}{18} = \frac{\sqrt{6273}}{18} \\ &= \frac{88}{18}\end{aligned}$$

\therefore இடைவெயுள்ள கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{88}{18}\right)$.

எனில் 2 : $x^2 + 2xy \sec \alpha + y^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் செம்பவானவை என்றும், அவற்றின் இடைவெட்ட கோணம் α என்றும் நிறுவுக.

$$h^2 - ab = \sec^2 \alpha - 1 = \tan^2 \alpha \geq 0$$

எனவே கோடுகள் செம்பவானவை.

அக் கோடுகளின் இடைவெயுள்ள கோணம் ϕ எனில்

$$\tan \phi = \frac{2 \sqrt{h^2 - ab}}{a+b} = \frac{2 \tan \alpha}{2} = \tan \alpha \quad \therefore \phi = \alpha$$

எனில் 3 : λ -யின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $ax^2 + 2hxy + by^2 + \lambda(x^2 + y^2) = 0$ எனும் கோடுகள் அதே சமவெட்டிகள் (same bisectors) கொண்டுள்ளன என நிறுவுக.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + \lambda(x^2 + y^2) = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad x^2(a + \lambda) + 2hxy + y^2(b + \lambda) = 0 \quad \dots (1)$$

இதன் சமவெட்டிகள்,

$$\frac{x^2 - y^2}{(a + \lambda) - (b + \lambda)} = \frac{xy}{h}$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h} \quad \dots \quad (2)$$

இது λ சார்பற்ற சமன்பாடாகவின், λ -வின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் (1)-இன் கோணச் சமவெட்டிகள்,

$$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h} \quad \text{ஆகும்.}$$

மாநி 4 : $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிகிலும் கோடுகளில் ஒன்றும், $a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 = 0$ குறிகிலும் கோடுகளில் ஒன்றும் பொருத்தும் கோடுகள். மற்ற இரு கோடுகள் தம்மன் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளுமெனில்,

$$\frac{ha_1b_1}{b_1 - a_1} = \frac{h_1ab}{b - a} = \frac{1}{2} (\sqrt{-ab a_1 b_1})$$

என நிறுக.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிகிலும் கோடுகள் $y - m_1 x = 0$, $y - m_2 x = 0$ எனின்,

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{b} \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 = 0$ குறிகிலும் கோடுகள் $y - m_3 x = 0$, $y - m_4 x = 0$ எனின்,

$$m_3 + m_4 = -\frac{2h_1}{b_1} \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$m_3 m_4 = \frac{a_1}{b_1} \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$\text{கொடுத்துள்ள திபத்தனை } m_1 = m_3 \dots \quad (5)$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\text{மேலும், } m_2 m_4 = -1 \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

(2), (3), (5) சமன்பாடுகளை இணைத்து

$$m_2 \left(-\frac{1}{m_4} \right) = \frac{a}{b} \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

$$(4)\text{-இன் டிடி } m_3 m_4 = \frac{a_1}{b_1} \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

(7), (8)-ஐப் பெருக்க.

$$m_3^2 = -\frac{aa_1}{bb_1} = -\frac{ab a_1 b_1}{b^2 b_1^2}$$

$$\therefore m_3 = \frac{\sqrt{-aa_1 bb_1}}{bb_1}$$

இதை (4)-இல் சேதிவிடும்,

$$\frac{\sqrt{-aa_1 bb_1}}{bb_1} m_4 = \frac{a_1}{b_1}$$

$$\therefore m_4 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{bb_1}{\sqrt{-aa_1 bb_1}} = \frac{a_1 b}{\sqrt{-aa_1 bb_1}}$$

$$(அ-அ) \quad m_4 = \frac{a_1 b \sqrt{-aa_1 bb_1}}{-aa_1 bb_1} = -\frac{\sqrt{-aa_1 bb_1}}{aa_1 b}$$

m_3, m_4 மதிப்புகளை (8)-இல் சேதிவிடும்,

$$\frac{\sqrt{-aa_1 bb_1}}{bb_1} + \frac{\sqrt{-aa_1 bb_1}}{-aa_1 b} = -\frac{2}{b_1} \frac{h_1}{b}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{-aa_1 bb_1}}{b_1} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] = -\frac{2}{b_1} \frac{h_1}{b}$$

$$(அ-அ) \quad \sqrt{-aa_1 bb_1} [b-a] = 2 h_1 ab$$

$$(அ-அ) \quad \frac{h_1 ab}{b-a} = \frac{1}{2} \sqrt{-aa_1 bb_1} \quad \dots \quad (9)$$

$$\text{மேலும் } m_1 = m_3 = \frac{\sqrt{-aa_1 bb_1}}{bb_1}$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_3} = -\frac{\sqrt{-aa_1 bb_1}}{a_1 b}$$

இம் மதிப்புகளை (1) இல் சேதிவிடும்,

$$\frac{\sqrt{-aa_1 bb_1}}{bb_1} - \frac{\sqrt{-aa_1 bb_1}}{a_1 b} = -\frac{2}{b} \frac{h}{b}$$

$$(அ-அ) \quad \frac{\sqrt{-aa_1 bb_1}}{b} \left[\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_1} \right] = -\frac{2}{b} \frac{h}{b}$$

$$(அ-து) \sqrt{-aa_1bb_1} [a_1 - b_1] = -2ba_1b_1$$

$$\therefore \frac{ba_1b_1}{b_1 - a_1} = \frac{1}{2} \sqrt{-aa_1bb_1} \quad \dots \quad (10)$$

(இ), (10) சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{ba_1b_1}{b_1 - a_1} - \frac{ba_1b}{b - a} = \frac{1}{2} \sqrt{-aa_1bb_1}$$

மாதிரி 5. $ax^2 + 8bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$ குறிக்கும் மூன்று கோடுகளில் இரண்டு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானிருக்க வேண்டிய கட்டுப்பாடு என்ன?

$ax^2 + 8bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$ மூன்று படிச் சமன்பாட்டான சமன்பாடு. எனவே, இஃது ஆதி வடிச் செல்லும் மூன்று கோடுகளைக் குறிக்கும். இவைகளில் இரண்டு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனில் அவைகளின் சமன்பாடு,

$$x^2 + pxy - y^2 = 0 \text{ என்ற வடிவிலிருக்கும்.}$$

எனவே,

$$\begin{aligned} ax^2 + 8bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 &= (x^2 + pxy - y^2) (ax - dy) \\ &= ax^3 + x^2y(ap - d) - xy^2(a + pd) + dy^3. \end{aligned}$$

ஒரே மாதிரியுள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமன்படுத்தி,

$$8b = ap - d \quad \dots \quad (1)$$

$$3c = -(a + pd) \quad \dots \quad (2)$$

$$(1)\text{-லிருந்து } p = \frac{8b + d}{a}$$

$$(2)\text{-லிருந்து } p = -\frac{a + 3c}{d}$$

$$\therefore \frac{8b + d}{a} = -\frac{a + 3c}{d}$$

இதைச் சுருக்கி,

$$a^2 + 8ac + 8bd + d^2 = 0$$

இதுவே தேவையான கட்டுப்பாடாகும்.

மற்ற 6 : $(A^2 - 8B^2)x^2 + 8ABxy + (B^2 - 8A^2)y^2 = 0$.
 $Ax + By + C = 0$ கோடுகளால் அமைவும் முக்கோணம் சமபக்க
 முக்கோணம் என திருவுக. அதன் பரப்பு $\frac{C^2}{\sqrt{8}(A^2 + B^2)}$ எனக்
 காண்க.

ஆதிவழிச் செல்லும் கோடுகளின் சமன்பாடு $y - mx = 0$
 வடிவிலிருக்கும். இக்கோடுகள் $Ax + By + C = 0$ கோட்டை
 P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினால் OPQ என்ற முக்கோணம்
 கிடைக்கும். $\triangle OPQ$ சமபக்கமுக்கோணமெனில் P, Q கோணங்கள்
 ஒவ்வொன்றின் எண் மதிப்பு 60° ஆகும். (அ-ஆ) $\pm 60^\circ$.

$$Ax + By + C = 0 \text{ த்தின் சரிவு } = -\frac{A}{B}.$$

$$\therefore \tan (\pm 60) = \frac{m + \frac{A}{B}}{1 - m \frac{A}{B}}$$

$$(\text{அ-ஆ}) \pm \sqrt{3} = \frac{mB + A}{B - mA}$$

$$\therefore 3(B - mA)^2 = (mB + A)^2$$

$$m = \frac{y}{x} \text{ ஆதலின்}$$

$$3 \left[B - \frac{y}{x} A \right]^2 = \left[\frac{y}{x} B + A \right]^2$$

$$\therefore 3[Bx - Ay]^2 = [By + Ax]^2$$

இதைச் சுருக்கி,

$x^2 [A^2 - 8B^2] + 8ABxy + y^2 [B^2 - 8A^2] = 0$. எனவே,
 $(A^2 - 8B^2)x^2 + 8ABxy + (B^2 - 8A^2)y^2 = 0$ குறிக்கும்
 கோடுகள் $Ax + By + C = 0$ கோட்டுடன் அமைக்கும்
 முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணமாகும்.

O -யிலிருந்து PQ கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக்கோட்டின்
 நீளம் $\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

$$PQ = 2PK \quad [\because K, PQ\text{-ஊன் நடுப்புள்ளி}]$$

$$\Rightarrow \angle OK \text{ is } 90^\circ$$

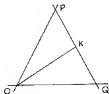
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

எனவே, $\triangle OPQ$ -ஊன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \sqrt{\frac{C}{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{BC}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \sqrt{\frac{C}{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{C^2}{\sqrt{2} (A^2 + B^2)}$$



படம் 2-4

பாதி 7. $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ay^4 = 0$ குறீக்கும் கோடுகளில் இரண்டு, மற்ற இரு கோடுகளின் இடைமேயுள்ள கோணத்தின் சம வெட்டிகளெனின்,

$$b + d = 0, \quad c + 6a = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ay^4 = 0 \quad (1)$$

குறீக்கும் கோடுகள் நான்கும் ஆதி வழிச் செல்லும் கோணத்தின் சமவெட்டிகள் இரண்டு தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுமாதலின் (1) குறீக்கும் இரண்டு இரட்டைக் கோடுகளும் ஒன்று கொன்று செங்குத்தானவை. எனவே (1)-ஐக் கீழ்க்காணும் வகையில் மாற்றி எழுதலாம்.

$$\begin{aligned}
 & ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 \\
 &= (ax^2 + pxy - ay^2)(x^2 + qxy - y^2) \\
 &= ax^4 + x^3y(pq + p) + x^2y^2(pq - 2a) \\
 &\quad + xy^3(-p - dq) + ey^4.
 \end{aligned}$$

$$\therefore b = p + dq \quad \dots \quad (2)$$

$$c = pq - 2a \quad \dots \quad (3)$$

$$-d = p + dq \quad \dots \quad (4)$$

$$(2), (3)\text{-ஹிந்து } b + d = 0$$

$$(3)\text{-ஹிந்து } c = pq - 2a$$

மேலும் $ax^2 + pxy - ay^2 = 0$ -த்தின் கோண இரு சமவெட்டிகள்

$$\frac{x^2 - y^2}{a + a} = \frac{xy}{p}$$

$$(அ - ஆ) \quad x^2 - y^2 = \frac{4a}{p} xy, \quad \dots \quad (5)$$

ஆனால் $ax^2 + pxy - ay^2 = 0$ -த்தின் கோணச் சம வெட்டிகள்

$$x^2 + qxy - y^2 = 0 \text{ ஆகும்,}$$

$$(அ - ஆ) \quad x^2 - y^2 = -qxy \quad \dots \quad (6)$$

$$(5), (6)\text{-ஹிந்து } \frac{4a}{p} = -q \quad \therefore pq = -4a$$

இதை (3)-இல் பிரதியிடுக.

$$c = pq - 2a = -4a - 2a = -6a$$

$$\therefore c + 6a = 0.$$

மேலும் 8. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளுக்குச் செங்குத் தாக ஆதி வழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$ என நிறுவுக.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = b(y - m_1x)(y - m_2x)$$

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, \quad m_1m_2 = \frac{a}{b}.$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \text{ குறிக்கும் கோடுகள்}$$

$$y - m_1x = 0, \quad y - m_2x = 0.$$

ஆதி வரையாக இக் கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோடுகள்,

$$m_1y + x = 0, \quad m_2y + x = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad (m_1y + x)(m_2y + x) = 0$$

$$m_1m_2y^2 + (m_1 + m_2)xy + x^2 = 0$$

$$\therefore \frac{a}{b}y^2 - \frac{2h}{b}xy + x^2 = 0.$$

$$(அ - ஆ) \quad ay^2 - 2hxy + bx^2 = 0.$$

பயிற்சி 3.1.

1. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளில் ஒன்றின் சரிவு மற்றதை விட இரு மடங்கொளில் $5b^2 = 8ab$ என்ற திறவுக.

2. $x^2 - 4xy + y^2 = 0$, $x + y = 8$ கோடுகளாலையும்கூடுகோணம் சமபக்க முக்கோணம் என திறவுக.

3. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $lx + my - 1 = 0$ கோடுகளாலையும்கூடுகோணத்தின் பரப்பு,

$$\frac{\sqrt{h^2 - ab}}{am^2 - 2hbm + b^2} \text{ என திறவுக.}$$

4. $ax^2 + bx^2y + cy^2 + dy^3 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் இரண்டு தம்மவர் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுமெனில் $a^2 + d^2 + bd + ac = 0$ என திறவுக.

5. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $y = x + c$ என்ற கோடுகளாலையும்கூடுகோணத்தின் பரப்பு.

$$\frac{c^2\sqrt{h^2 - ab}}{a + 2h + b} \text{ என திறவுக.}$$

6. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ஓர் இணைகூத்தின் இரு பக்கங்களைக் குறிக்கின்றது. $lx + my = 1$ ஒரு மூலம் விட்ட

மேலின் வர்க்கெழு மூலம் விட்டம் $y (b - kn)$
 $= x (an - h)$ என திறவுக.

7. $m(x^2 - 2xy^2) + (y^2 - 2x^2y) = 0$ எனும் சமன்பாடு
தம்மூல் சம சாயவுள்ள மூன்று கோடுகளைக் குறிக்கும்
என திறவுக.
8. $y^2 - x^2 + 2xy(y - x) = 0$ ஒன்றுக் கொன்று சம சாய்
வுள்ள மூன்று கோடுகளைக் குறிக்கும் என திறவுக.
9. $x^2 + 2xy \cot \theta + y^2 = 0$ கோடுகளின் இடைவெயுள்ள
கோணத்தில் இரு சம வெட்டிகளின் சமன்பாடு காண்க.
10. $x^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 4xy \sin \alpha \sin \beta + y^2 (4 \cos^2 \alpha - (1 + \cos \alpha)^2 \cos^2 \beta) = 0$ என்ற கோடுகளின் இடைவெயுள்ள
மட்ட கோணம் α என திறவுக.
11. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக
ஆதி வரீச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு
 $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$ என திறவுக.
12. $8x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$ என்ற கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக
ஆதி வரீச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு
என்ன?
13. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளுக்கு $P(x_1, y_1)$ புள்ளி
விநிருத்த வரையம் செங்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத்
தொகை $\frac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$ என திறவுக.
14. $(a + 2hn + bn^2)x^2 + 2[(b-a)n - (n^2 - 1)h]xy + (an^2 - 2bn + b)y^2 = 0$ கோடுகளின் இடைவெயுள்ள
கோணம் n -இல் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும்
மாகுத் தன்னையது என திறவுக.
15. $a^2x^2 + 2h(a+b)xy + b^2y^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக்
கோடுகள் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக்
கோடுகளுடன் சமவாகச் சாயத்துள்ளன என திறவுக.
16. $y + x = 0$ கோட்டுடன் α கோணம் மிதப்பிக்கும்
கோடுகள் ஆதி வரீச் செல்வீன்றன எனில், அக் கோடு
களின் சமன்பாடு $x^2 + 2xy \sec 2\alpha + y^2 = 0$ என
திறவுக.

17. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகள் $lx + my + 1 = 0$ கோட்டுடன் அமைக்கும் மூக்கோணத்தின் குத்துக் கோட்டுச் சத்தி.

$$\left[\frac{l(a+b)}{am^2 - 2hlm + b^2} - \frac{m(a+b)}{am^2 - 2hlm + b^2} \right]$$

என நிறுவுக.

18. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் ஒன்றும் $a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் ஒன்றும் பொருத்தும் கோடுகளெனில் $(ab_1 - a_1b)^2 = 4(ha_1 - h_1a)(hb_1 - b_1h)$ என நிறுவுக.

19. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்தின் இரு சம வெட்டிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை என நிறுவுக.

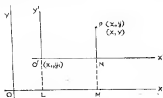
20. ஆதி வளிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகள் ஒவ்வொன்றி லிருந்து (x_1, y_1) புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் d எனில், ஆக் கோடுகளின் சமன்பாடு $(xy_1 - x_1y)^2 = d^2(x_1^2 + y_1^2)$ என நிறுவுக.

விடைகள்

9. $x^2 - y^2 = 0$ 10. $5x^2 + 8xy + 3y^2 = 0$.

3.5. அச்சதலை மாற்றம் (Transformation of Axes)

1. அச்சத்தலின் போக்கை மாற்றும் ஆயங்களின் ஆதியை மாற்றும்



படம் 35.

OX, OY பழைய ஆயங்கள் எனவும், $O'X', O'Y'$ என்பவை முறையே OX, OY கோடுகளுக்கிணையாக வரையப்பட்ட புதிய

ஆயங்கள் எனவும் கொள்வோம். பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்து O' ன் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1) எனில் $OL = x_1$, $LO' = y_1$.

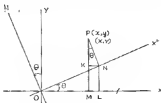
P என்பது தளத்தில் உள்ள வாதேனும் ஒரு புள்ளி. பழைய ஆயங்கள், புதிய ஆயங்கள் இவைகளைப் பொறுத்து P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் முறையே (x, y) , (X, Y) எனக் கொள்வோம். P -யிலிருந்து OX -க்குச் செங்குத்தாக வரையல் கோடு OX' -ஐ N -யிலும், OX -ஐ M -யிலும் செட்டுகிறது எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore x = OM = OL + LM = x_1 + X$$

$$y = MP = LO' + NP = y_1 + Y.$$

ஆகவே x, y ஆயத்தொலைகளுக்கு $x = x_1 + X$, $y = y_1 + Y$ எனப் பிரதிபெட்டு ஆதிமை (x_1, y_1) புள்ளிக்கு மாற்றலாம்.

2. ஆதிமை மாற்றமும் ஆயங்களின் போக்கும் மாற்றமும்



படம் 20.

OX, OY பழைய ஆயங்கள் எனவும், OX', OY' புதிய ஆயங்கள் எனவும் கொள்வோம்.

$\angle XOY' = \theta$ எனக்கொள்க. தளத்தில் வாதேனும் ஒரு புள்ளி P எனக்கொள்வோம். P -யிலிருந்து OX, OX' கோடுகளுக்கு முறையே PM, PN என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரையவும். N -யிலிருந்து OX, PM கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக முறையே NL, NK கோடுகள் வரையவும். பழைய ஆயங்கள், புதிய

ஆய்வினர் ஆதிபலத்தைப் பொறுத்து P புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் முறையே (x, y) , (X, Y) எனக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned}x &= OM = OL - ML = OL - KN \\&= ON \cos \theta - NP \sin \theta = X \cos \theta - Y \sin \theta \\y &= MP = MK + KP = LN + KP \\&= ON \sin \theta + NP \cos \theta = X \sin \theta + Y \cos \theta.\end{aligned}$$

எனவே, x, y என்ற ஆயத் தொலைகளுக்கும் புதியாக $x = X \cos \theta - Y \sin \theta$, $y = X \sin \theta + Y \cos \theta$ எனப் பிரதியிட்டு θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள புதிய ஆயங்களையே பொறுத்துச் சமன்பாடு பெறலாம்.

3.6. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் எனவும், அவைகள் வெட்டுக் புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்வோம்.

ஆயங்களின் போக்கை மாற்றலால் ஆதியை (x_1, y_1) புள்ளிக்கு மாற்றவும். இம் மாற்றத்தால் (x, y) என்ற ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (X, Y) என மாறினும்,

$$x = x_1 + X, \quad y = y_1 + Y.$$

எனவே சமன்பாடு (1)-இல் $x = x_1 + X$, $y = y_1 + Y$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$\begin{aligned}a(x_1 + X)^2 + 2h(x_1 + X)(y_1 + Y) + b(y_1 + Y)^2 \\+ 2g(x_1 + X) + 2f(y_1 + Y) + c = 0.\end{aligned}$$

இதைச் சுருக்கிச்,

$$\begin{aligned}aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2(ax_1 + hy_1 + g)X \\+ 2(hx_1 + by_1 + f)Y + (ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 \\+ 2fy_1 + c) = 0 \quad \text{என்றும்,}\end{aligned}$$

புதிய ஆதிபலி இக் கோடுகள் செல்வதால் இக் கோடுகளைக் குறிக்கும் சமன்பாடு சமபடித்தானதாய் இருக்கவேண்டும்.

$$\text{எனவே, } ax_1 + by_1 + g = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$hx_1 + by_1 + f = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$$

$$\text{(அ-து)} \quad x_1(ax_1 + by_1 + g) + y_1(hx_1 + by_1 + f) \\ + gx_1 + fy_1 + c = 0.$$

$$\therefore gx_1 + fy_1 + c = 0 \quad \dots \quad (4)$$

(2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{x_1}{hf - bg} = \frac{y_1}{gh - af} = \frac{1}{ab - h^2}.$$

$$\therefore x_1 = \frac{hf - bg}{ab - h^2}, \quad y_1 = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

இதை (4)-இல் பிரதியிடுக,

$$g \left(\frac{hf - bg}{ab - h^2} \right) + f \left(\frac{gh - af}{ab - h^2} \right) + c = 0$$

$$\text{(அ-து)} \quad fgh - bg^2 + fgh - af^2 + abc - ch^2 = 0$$

எனவே தேவையான கட்டுப்பாடு,

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$$

$$\text{இரட்டைக் கோடுகள் வெட்டுப் புள்ளி } \left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2} \right)$$

குறிப்பு: $ab - h^2 = 0$ எனில் இரட்டைக் கோடுகள் வெட்டுப் புள்ளி கத்தழிவிலுள்ளது. அந்தவாறு இரட்டைக் கோடுகள் இல்லையாம்.

பிரதோடு முறை

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

இரட்டைக் கோடுகளாக குறிக்கும் எனக்கொள்வோம்.

அவைகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு,

$$l_1x + m_1y + n_1 = 0, \quad l_2x + m_2y + n_2 = 0 \text{ எனில்}$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c \\ = (l_1x + m_1y + n_1)(l_2x + m_2y + n_2)$$

எனவே ஒத்த உறுப்புகளின் தொகையை ஒப்பிடுக.

$$a=l_1 l_2, \quad b=m_1 m_2, \quad c=n_1 n_2$$

$$2f=m_1 n_2+m_2 n_1, \quad 2g=n_1 l_2+n_2 l_1, \quad 2h=l_1 m_2+l_2 m_1$$

$$\begin{aligned} \therefore 8fgh &= (m_1 n_2 + m_2 n_1) (n_1 l_2 + n_2 l_1) (l_1 m_2 + l_2 m_1) \\ &= l_1 l_2 (m_1^2 n_2^2 + m_2^2 n_1^2) + m_1 m_2 (n_1^2 l_2^2 + n_2^2 l_1^2) \\ &\quad + n_1 n_2 (l_1^2 m_2^2 + l_2^2 m_1^2) + 2l_1 l_2 m_1 m_2 n_1 n_2 \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1^2 n_2^2 + m_2^2 n_1^2 &= (m_1 n_2 + m_2 n_1)^2 - 2m_1 m_2 n_1 n_2 \\ &= 4f^2 - 2bhc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1^2 l_2^2 + n_2^2 l_1^2 &= (n_1 l_2 + n_2 l_1)^2 - 2n_1 n_2 l_1 l_2 \\ &= 4g^2 - 2cal^2 m_2^2 + l_2^2 m_1^2 = (l_1 m_2 + l_2 m_1)^2 \\ &\quad - 2l_1 l_2 m_1 m_2 = 4h^2 - 2abc. \end{aligned}$$

இதை (2)-இல் பிரதியிடுக.

$$8fgh = a(4f^2 - 2bhc) + b(4g^2 - 2ca) + c(4h^2 - 2ab) + 2abc$$

இதைச் சுருக்கி.

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

3-7 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டைக் கோடுகளாக
குறிக்காமலின் இக்கோடுகளுக்கு இணையாக ஆதிவழித்
கோடும் கோடுகளின் சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$
ஆகும்.

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும்
இரட்டைக் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு,

$$\begin{aligned} l_1 x + m_1 y + n_1 &= 0, \quad l_2 x + m_2 y + n_2 = 0 \text{ எனின்} \\ a &= l_1 l_2, \quad b = m_1 m_2, \quad c = n_1 n_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2f &= m_1 n_2 + m_2 n_1, \quad 2g = n_1 l_2 + n_2 l_1, \quad 2h = l_1 m_2 + l_2 m_1, \\ l_1 x + m_1 y + n_1 &= 0, \quad l_2 x + m_2 y + n_2 = 0 \end{aligned}$$

கோடுகளாகிணையாக ஆதிவழித் கோடும் கோடுகள்,

$$l_1 x + m_1 y = 0, \quad l_2 x + m_2 y = 0$$

இவைகளின் சேர்த்த சமன்பாடு.

$$(l_1 x + m_1 y)(l_2 x + m_2 y) = 0$$

$$l_1 l_2 x^2 + (l_1 m_2 + l_2 m_1) xy + m_1 m_2 y^2 = 0$$

$$(\text{அ.து}) \quad ax^2 + 2hxy + by^2 = 0.$$

குத்பு : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.. (1)
 குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$.. (2)
 குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளுக்கிடையேயாக சமன்பாடு
 (1) குறிக்கும் கோடுகளின் இடைவெட்ட கோணம் சமன்பாடு
 (2) குறிக்கும் கோடுகளின் இடைவெட்ட கோணத்திற்குச் சமம்.

$$\tan \phi = \frac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}.$$

$h^2 = ab$ எனில் (1) குறிக்கும் கோடுகளின்மீதும் இரண்டு கோடுகள் காணப்படும்.

$a + b = 0$ எனில் அப்போது ஒன்றுக் கொன்று சமன்பாடு.

3.8. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் மேலும், அக்கோடுகளின் இடைவெட்ட கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகள் காண்க.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{--- (1)}$$

குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

ஆய்களின் பொக்கை மாற்றால் ஆதிமை (x_1, y_1) புள்ளிக்கு மாற்றினால் (x, y) புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (X, Y) ஆக மாறும்.

$$\therefore x = x_1 + X, \quad y = y_1 + Y$$

எனவே புது ஆய்களில் பொறுத்து இக் கோடுகளின் சமன்பாடு,

$$a(x_1 + X)^2 + 2h(x_1 + X)(y_1 + Y) + b(y_1 + Y)^2 + 2g(x_1 + X) + 2f(y_1 + Y) + c = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இக் கோடுகள் ஆதிவழிச் செல்வதாக சமன்பாடு

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 = 0 \text{ என்குதும்,}$$

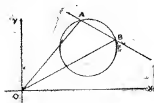
எனவே கோணச் சமவெட்டிகள்,

$$\frac{Y_1 - Y_2}{a - b} = \frac{XY}{h}$$

(அ - து) பழைய ஆயக்களைப் பொறுத்துக் கொண் இரு சம
வெட்டிகளின் சமன்பாடு,

$$\frac{(x-x_1)^2 - (y-y_1)^2}{a-b} = \frac{(x-x_1)(y-y_1)}{h} \text{ ஆகும்.}$$

39. $lx + my + n = 0$ கோடு $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ன்റെ வரைவடிவமேடும் இரு புள்ளிகளை ஆறுபுள்ளி கோக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளாம்.



11. 27.

$$I_k + m\gamma + n = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots(9)$$

சமன்பாடு (1) குறிக்கும் கோடு (2) வளைவுறையை A, B புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்ளலாம். O ஆதி எலில் OA, OB கோடுகளின் சேர்த்த சமன்பாட்டைக் கணக் சமன்பாடு (2)-ஐச் சமன்பாடு (1)-இன் உதவியால் சமபடித்தான சமன் பட்டாக மாற்றலாம்.

தில்லாறு மாற்றினால்,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + (2gx + 2fy) \left(\frac{lx + my}{-n} \right) + c \left(\frac{lx + my}{-n} \right)^2 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இஃது இருபடிச் சமன்பாட்டான சமன்பாடாதலின் ஆதி வழிச் செல்லும் இரு கோடுகளைக் குறிக்கும்.

மேலும்,

$lx + my + n = 0$, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாடுகளில் பொருத்தும் புள்ளிகள் சமன்பாடு (3) இலும் பொருத்தும்.

எனவே சமன்பாடு (3), OA , OB கோடுகளைக் குறிக்கும்.

மாதிரி 9: $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. அவைகள் வெட்டுப் புள்ளியைவரும், அவைகளின் இடைவெய்தின் கோணமும் காண்க.

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$a = 1, b = -5, c = 4, g = 1, f = 2, e = -2.$$

$$\begin{aligned} & efc + f^2g - af^2 - bg^2 - eh^2 \\ &= (1)(4)(-2) + 2(1)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) - 1(1)^2 \\ & \quad - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= -8 - \frac{5}{2} - 1 - 1 + \frac{25}{2} = -\frac{25}{2} + \frac{25}{2} = 0. \end{aligned}$$

எனவே, சமன்பாடு (1) இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = (x - 4y)(x - y)$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 & \\ &= (x - 4y + a)(x - y + b) \\ &= x^2 - 5xy + 4y^2 + (a + b)x - (a + 4b)y + ab \end{aligned}$$

ஒத்த உறுப்புகளின் செழுக்களை ஒப்பிடுவர்.

$$a + b = 1, \quad a + 4b = -2$$

$$\therefore a = 2, \quad b = -1.$$

எனவே கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு,

$$x - 4y + 2 = 0, \quad x - y - 1 = 0.$$

இவ்வகை விடுபிடுபின் $x = 2$, $y = 1$.

∴ வெட்டும் புள்ளி $(2, 1)$.

கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் ϕ எனின்,

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} \\ &= \frac{2\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 1 \cdot 4}}{1 + 4} \\ &= \frac{2\sqrt{25 - 16}}{10} = \frac{3}{5} \\ \therefore \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{3}{5} \right). \end{aligned}$$

எனத் 10 : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்குமெனின் அவ்வகை வெட்டும் புள்ளி,

$$\left(\sqrt{\frac{f^2 - bc}{h^2 - ab}}, \sqrt{\frac{g^2 - ca}{h^2 - ab}} \right)$$

என நிறுவுக.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

குறிக்கும் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு

$$l_1x + m_1y + n_1 = 0$$

$$l_2x + m_2y + n_2 = 0 \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$\therefore l_1l_2 = a, \quad m_1m_2 = b, \quad n_1n_2 = c$$

$$2f = m_1n_2 + m_2n_1, \quad 2g = n_1l_2 + n_2l_1, \quad 2h = l_1m_2 + l_2m_1.$$

ஆக கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனில்,

$$\frac{x_1}{m_1n_2 - m_2n_1} = \frac{y_1}{n_1l_2 - n_2l_1} = \frac{1}{l_1m_2 - l_2m_1}$$

$$\therefore x_1 = \frac{m_2n_2 - m_1n_1}{l_1m_2 - l_2m_1}, \quad y_1 = \frac{n_1l_2 - n_2l_1}{l_1m_2 - l_2m_1} \quad \dots \quad (1)$$

மேலும்,

$$\begin{aligned} m_1 n_2 - m_2 n_1 &= \sqrt{(m_1 n_2 + m_2 n_1)^2 - 2 m_1 m_2 n_1 n_2} \\ &= \sqrt{4 f^2 - 4 bc} = 2 \sqrt{f^2 - bc} \\ n_1 l_2 - n_2 l_1 &= \sqrt{(n_1 l_2 + n_2 l_1)^2 - 2 n_1 n_2 l_1 l_2} = 2 \sqrt{g^2 - ca} \\ l_1 m_2 - l_2 m_1 &= \sqrt{(l_1 m_2 + l_2 m_1)^2 - 2 l_1 l_2 m_1 m_2} \\ &= 2 \sqrt{h^2 - ab} \\ \therefore x_1 &= \sqrt{\left(\frac{f^2 - bc}{h^2 - ab}\right)}, \quad y_1 = \sqrt{\left(\frac{g^2 - ca}{h^2 - ab}\right)} \end{aligned}$$

எனவே ஆக் கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி,

$$\left[\sqrt{\frac{f^2 - bc}{h^2 - ab}}, \sqrt{\frac{g^2 - ca}{h^2 - ab}} \right].$$

மாதிரி 11: $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டைக் கோடுகளாக குறிப்பிடுமெனின், ஆதிவிசிறந்து இக் கோடுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத் தொகை,

$$\frac{c}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

என நிறுவுக.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

குறிக்கும் கோடுகளின் தனித்தனிக் சமன்பாடு

$$l_1 x + m_1 y + n_1 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$l_2 x + m_2 y + n_2 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore l_1 l_2 = a, \quad m_1 m_2 = b, \quad n_1 n_2 = c$$

$$2f = (m_1 n_2 + m_2 n_1), \quad 2g = (n_1 l_2 + n_2 l_1), \quad 2h = (l_1 m_2 + l_2 m_1)$$

p_1 = ஆதிவிசிறந்து (1)-க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் தீளம்,

$$= \frac{n_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}}.$$

$p_2 =$ ஆதிநிலிக்குத்து (2)-க்கு வரைவாய்வும் செங்குத்துக் கோட்டின் தன்மை,

$$\begin{aligned} &= \frac{n_2}{\sqrt{l_2^2 + m_2^2}} \\ \therefore p_1 p_2 &= \frac{n_1 n_2}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2)(l_2^2 + m_2^2)}} \\ &= \frac{n_1 n_2}{\sqrt{l_1^4 l_2^2 + (l_1^2 m_2^2 + l_2^4 m_1^2) + m_1^2 m_2^2}} \\ &= \frac{n_1 n_2}{\sqrt{\{(l_1 l_2)^2 + (l_1 m_2 + l_2 m_1)^2 - 2 l_1 l_2 m_1 m_2 + (m_1 m_2)^2\}}} \\ &= \frac{e}{\sqrt{a^2 + (2b)^2 - 2ab + b^2}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{(a-b)^2 + 4b^2}} \end{aligned}$$

எனினி 12 : $h^2 = ab$, $bg^2 = af^2$ எனில் $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரண்டு இணை கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறவுக. அக் கோடுகளாகியனையவுள்ள தூரம்,

$$= \sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a+b)}}$$

எனவும் நிறவுக.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (1)$$

இணைகோடுகளைக் குறிக்குமெனில், அவைகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு,

$$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + l = 0, \quad \sqrt{ax} + \sqrt{by} + m = 0$$

கூடியிருக்கும்.

$$\begin{aligned} \therefore ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c &= (\sqrt{ax} + \sqrt{by} + l)(\sqrt{ax} + \sqrt{by} + m) \\ &= ax^2 + 2\sqrt{ab}xy + by^2 + (l+m)\sqrt{ax} \\ &\quad + (l+m)\sqrt{by} + lm \end{aligned}$$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெடுக்களை ஒப்பிடுவர்,

$$\sqrt{a} (l + m) = 2g \quad \dots \quad (2)$$

$$\sqrt{b} (l + m) = 2f \quad \dots \quad (3)$$

$$2\sqrt{ab} = 2h \quad \dots \quad (4)$$

$$lm = c \quad \dots \quad (5)$$

ஆகும்.

$$(3), (2) \text{ சமன்பாடுகளிலிருந்து } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{g}{f}$$

$$(அ - ஆ) \quad f\sqrt{a} = g\sqrt{b} \quad \therefore af^2 = bg^2.$$

$$(4)\text{-லிருந்து } 4ab = 4h^2 \quad (அ - ஆ) \quad h^2 = ab.$$

மேலும் ஆதிவிரித்து,

$$\sqrt{a}x + \sqrt{b}y + l = 0, \quad \sqrt{a}x + \sqrt{b}y + m = 0$$

கோடுகளுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளம் மூன்றாவது p_1, p_2 எனில்,

$$p_1 = \frac{l}{\sqrt{a+b}}, \quad p_2 = \frac{m}{\sqrt{a+b}}$$

$$\begin{aligned} \therefore d = p_1 - p_2 &= \frac{l-m}{\sqrt{a+b}} \\ &= \frac{\sqrt{(l+m)^2 - 4lm}}{\sqrt{a+b}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{4g^2}{a} - 4c}}{\sqrt{a+b}} \\ &= 2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a+b)}} \end{aligned}$$

மாதிரி 13: $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் கோண இரு சமவெட்டிகளானது, x ஆயத்தொழும் அமைப்பில் மூக்கோணத்தில் படையு,

$$\frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}{2h} \cdot \frac{ca - g^2}{ab - h^2}$$

என நிறவுக.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (1)$$

குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore x_1 = \sqrt{\frac{f^2 - bc}{h^2 - ab}}, \quad y_1 = \sqrt{\frac{g^2 - ca}{h^2 - ab}}$$

இரட்டைக் கோடுகளின் கோண இரு சமவெட்டிகள்,

$$\frac{(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2}{a - b} = \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{h} \quad \dots (2)$$

இக் கோடுகள் x ஆயத்தை $A(\alpha_1, 0)$, $B(\alpha_2, 0)$ புள்ளிகளில் வெட்டும் எனக் கொள்க.

சமன்பாடு (2)-இல் $y = 0$ எனப் பிரதியிடுவர் கிடைக்கும் இருபடிச் சமன்பாட்டிலிருந்து x -இன் இரு மதிப்புகளான α_1, α_2 கிடைக்கின்றன.

$$\therefore \frac{(x - x_1)^2 + y_1^2}{a - b} = \frac{-(x - x_1)y_1}{h}$$

$$(\text{அ-து}) \quad hx^2 + y_1(a - b)x - hy_1^2 = 0, \quad x = (x - x_1)$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-(a - b)y_1}{h}, \quad x_1 x_2 = -y_1^2$$

$$\text{மேலும் } z_1 = \alpha_1 - x_1, \quad z_2 = \alpha_2 - x_1$$

$$(\text{அ-து}) \quad \alpha_1 - \alpha_2 = (x_1 + x_1) - (x_2 + x_1) = z_1 - z_2 \dots (3)$$

$\triangle PAB = \frac{1}{2} AB$ [P -இலிருந்து AB -க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்]

$$= \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) y_1$$

$$= \frac{1}{2} (z_1 - z_2) y_1$$

$$= \frac{1}{2} \{ \sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2} \} y_1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{(a-b)^2}{h^2}} y_1^2 + 4y_1^2 \right\} y_1 \\
&= \frac{1}{2} y_1 \frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}{h} y_1 \\
&= \frac{y_1^2}{2h} \sqrt{(a-b)^2 + 4h^2} \\
&= \frac{g^2 - ca}{h^2 - ab} \cdot \frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}{2h}
\end{aligned}$$

$$\left[\because y_1 = \sqrt{\frac{g^2 - ca}{h^2 - ab}} \right]$$

எனில் 14 : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்றும் இரட்டைக் கோடுகள் ஆகியிருந்து சம தூரத்திலிருந்து செல் $f^2 - g^2 = c (bf^2 - ag^2)$ என நிறுவுக.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் தனித்தனியே சமன்பாடு,

$$l_1 x + m_1 y + n_1 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$l_2 x + m_2 y + n_2 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

எனக்கொள்ளோம்.

$$\therefore a = l_1 l_2, \quad b = m_1 m_2, \quad c = n_1 n_2$$

$$2f = m_1 n_2 + m_2 n_1, \quad 2g = n_1 l_2 + n_2 l_1,$$

$$2h = l_1 m_2 + l_2 m_1$$

(1), (2) கோடுகள் ஆகியிருந்து சம தூரத்திலிருப்பின்,

$$\frac{n_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}} = \frac{n_2}{\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$$

$$\therefore n_1^2 (l_2^2 + m_2^2) = n_2^2 (l_1^2 + m_1^2)$$

$$(அ-அ) n_1^2 l_2^2 + n_1^2 m_2^2 - n_2^2 l_1^2 - n_2^2 m_1^2 = 0$$

$$(அ-அ) (n_1^2 l_2^2 - n_2^2 l_1^2) + (n_1^2 m_2^2 - n_2^2 m_1^2) = 0$$

$$(அ-அ) (n_1 l_2 + n_2 l_1)(n_1 l_2 - n_2 l_1) + (n_1 m_2 + n_2 m_1)(n_1 m_2 - n_2 m_1) = 0$$

இரட்டைக் கோடுகள்

$$(அ-அ) (n_1 l_2 + n_2 l_1) (n_1 l_2 - n_2 l_1) \\ = (m_1 n_2 + m_2 n_1) (m_1 n_2 - m_2 n_1)$$

$$\therefore (n_1 l_2 + n_2 l_1) \sqrt{(n_1 l_2 + n_2 l_1)^2 - 4 n_1 n_2 l_1 l_2} \\ = (m_1 n_2 + m_2 n_1) \sqrt{(m_1 n_2 + m_2 n_1)^2 - 4 m_1 m_2 n_1 n_2}$$

$$(அ-ஆ) 2g \sqrt{4g^2 - 4ac} = 2f \sqrt{4f^2 - bc}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$4g^2 (4g^2 - 4ac) = 4f^2 (4f^2 - bc)$$

$$\therefore g^2 (g^2 - ac) = f^2 (f^2 - bc)$$

$$(அ-அ) g^2 - f^2 = -c (bf^2 - ag^2)$$

$$\therefore f^2 - g^2 = c (bf^2 - ag^2).$$

எனவே 15 : $12x^2 + 7xy - 12y^2 = 0$, $12x^2 + 7xy - 12y^2 - x + 7y - 1 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள் ஒரு சதுரத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 = (8x + 4y)(4x - 8y).$$

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 - x + 7y - 1 \\ = (8x + 4y + 1)(4x - 8y + 1).$$

ஒத்த உறுப்புக்களின் கெடுக்களை ஒப்பிட்டு $l = -1$, $m = 1$ என்கறும்.

$$\text{எனவே, } 12x^2 + 7xy - 12y^2 - x + 7y - 1 \\ = (8x + 4y - 1)(4x - 8y + 1).$$

எனவே நான்கு கோடுகளின் நனித்தனிச் சமன்பாடு,

$$8x + 4y = 0, \quad 4x - 8y = 0 \quad \text{---} \quad (1)$$

$$8x + 4y - 1 = 0, \quad 4x - 8y + 1 = 0 \quad \text{---} \quad (2)$$

(1) குறிக்கும் கோடுகள், (2) குறிக்கும் கோடுகளுக்கு இணையாகும். எனவே இக்கோடுகள் ஒரே இணையத்தை அமைக்கும்.

மேலும், (1) குறிக்கும் கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தானவை ;
(2) குறிக்கும் கோடுகளும் தம்முள் செங்குத்தானவை.

$$\text{மேலும் } 3x + 4y = 0, \quad 3x + 4y - 1 = 0 \text{ இடைமேயுள்ள} \\ \text{தூரம் } = \frac{0}{\sqrt{3^2 + 4^2}} - \frac{-1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{இவ்வாறே } 4x - 3y = 0, \quad 4x - 3y + 1 = 0 \text{ இடைமே} \\ \text{யுள்ள தூரம் } = \frac{0}{\sqrt{4^2 + 3^2}} - \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}.$$

∴ தாக்கு கோடுகளும் ஒரு சதுரத்தை அமைக்கும்.

பயிற்சி 3.2.

1. $x^2 + 5xy + 4y^2 + 3x + 3y + \lambda = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பின் λ -வின் மதிப்பு யாது? அக்கோடுகளின் இடைமேயுள்ள கோணம் காண்க.
2. $x^2 - y^2 + x - 3y - 2 = 0$ இரட்டைக்கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறவு. அவைகளின் இடைமேயுள்ள கோணத்தையும், அவைகள் வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.
3. $4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 3y - 4 = 0$ இரண்டு இணை கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறுவி, அவைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தைக் காண்க.
4. $y^2 - 4y + 5 = 0$, $x^2 + 4xy + 4y^2 - 8x - 10y + 4 = 0$ என்ற கோடுகள் ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும் என நிறுவிப் பக்கங்களின் நீளத்தைக் காண்க.
5. $8x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$, $6x^2 - 8xy - 3y^2 + x + 3y - 1 = 0$ கோடுகள் ஒரு சதுரத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.
6. $ax^2 + 2bxy + by^2 + 2cx + 2fy + c = 0$ என்ற கோடுகள் y ஆயத்தை A, B புள்ளிகளில் சந்திக்கும். O ஆதி எனில், $OA^2 + OB^2 = \frac{c(a+b)-f^2-b^2}{ab-b^2}$ என நிறுவுக.

7. $2x^3 + 5xy + 2y^3 + 15x + 18y + 25 = 0$ கோடுகளின் இடைவெயுள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகளைக் காண்க.
8. P என்ற ஒரு புள்ளியிலிருந்து $ax^3 + 2hxy + by^3 = 0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகளுக்கு இடைவெயுள்ள தூரம் $2c$ எனில், P -யின் இயங்குவழி $c^2 [4h^3 + (a-b)^3] = (x^3 + y^3)(h^3 - ab)$ என நிறவுக.
9. $ax^3 + 2hxy + by^3 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகள் x அச்சின் அமைக்கும் முக் கோணத்தின் மூலப் புள்ளி $\frac{x^3 - ac}{a\sqrt{h^3 - ab}}$ என நிறவுக.
10. $5x^3 + 12xy - 8y^3 + 4x - 2y + 3 = 0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளை $x - y - 1 = 0$ கோடு வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதிபுடன் சேக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் ஆய்வுகருடன் சமச் சாய்வுடையன என நிறவுக.
11. $lx + my = 1$ என்ற கோடு $x^3 + y^3 - a^3 = 0$ வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. O ஆதி எனில், $\angle OPQ = 2 \cos^{-1} \left(\frac{1}{a\sqrt{l^2 + m^2}} \right)$ என நிறவுக.
12. $8x - y + 3 = 0$ என்ற கோடு $8x^3 + 4xy - 4y^3 - 11x + xy + 3 = 0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளுடன் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளை ஆதிபுடன் சேக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் ஆய்வுகருடன் சமச் சாய்வுடையன என நிறவுக.
13. $ax^3 + 2hxy + by^3 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனும் சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்குமெனின், இவைகள் ஆய்வுகரு வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு,

$$c(ax^3 + 2hxy + by^3 + 2gx + 2fy + c) + 4fgxy = 0$$
 என நிறவுக.
14. $x^3 + y^3 = a^3$ என்ற வட்டத்தை $l = mx + c$ என்ற கோடு வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதிபுடன் சேக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனின் $2c^3 = a^3(l^2 + m^2)$ என நிறவுக.

15. $(a-b)(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy)+af^2+bg^2-2fg=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகள் $ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளுடன் அமைக்கும் ஒரு நேர்க்குறி சாய சதுரமொன்று.

$$(a-b)fg+h(f^2-g^2)=0 \text{ என நிறுவுக.}$$

16. $6x^2+xy-12y^2-14x+47y-40=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகள் $14x^2+xy-4y^2-80x+167y=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளுடன் சமச் சாயவுடையது என நிறுவுக.

17. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ இரண்டு இணை கோடுகளாக குறிக்கு மெனின், அவைகளுக்கிடையாக ஆதி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $ax+hy=0$ அல்லது $hx+by=0$ என நிறுவுக.

18. $ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளின் இடைவெடிள்ள கோணத்தில் இரு சம வெட்டிகளில் ஒன்று $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் சென்றால் $(a-b)fg+h(f^2-g^2)=0$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $\lambda = -\frac{10}{9}$; $\tan^{-1}\left(\frac{8}{5}\right)$, 2. 90° ; $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$,
4. 8; $2\sqrt{5}$, 7. $3x^2-8y^2+20x-2y+88=0$.

4. வட்டம்

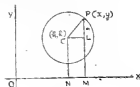
(Circle)

4.1. வட்டம் - வரையறை

நிலைத்த புள்ளி ஒன்றிலிருந்து நிலையான தூரத்தில் இயங்கும் புள்ளியின் பாதை வட்டமென்பதும், நிலைத்த புள்ளி வட்டத்தின் மையம் எனவும், நிலையான தூரம் அதன் ஆரம் எனவும் கூறப்படுகின்றன.

4.2. வட்டத்தின் சமன்பாடு

OX, OY என்பவை ஆயங்கன், C வட்டமையம், P வட்டத்தின் ஆரம் எனக் கொள்வோம்.



படம் 28

$P(x, y)$ புள்ளியின் (circumference) மீதுள்ள வரையறையும் ஒரு புள்ளி, x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக PM, CN என்ற கோடுகள் வரையவும். PM -க்குச் செங்குத்தாக CL என்ற கோடு வரையவும்.

C -யின் ஆயத்தொலைகள் (h, k) எனில்,

$$CL = NM = OM - ON = x - h$$

$$LP = MP - ML = MP - NC = y - k,$$

$$ப. வ. = r^2$$

செய்கோண முக்கோணம் CLP-இல்

$$CL^2 + LP^2 = CP^2$$

$$\therefore (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

எனவே, மையம் (h, k) , ஆரம் a கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் சமன்பாடு $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$.

வினா 1: ஆதிமைய மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = a^2$$

$$(அ-து) \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

வினா 2: NC ஆரத்திற்குச் சமமெனில், வட்டம் x ஆயத்ததைத் தொடும். எனவே $k = a$.

\therefore வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = k^2$$

$$(அ-து) \quad x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + k^2 = 0.$$

இவ்வாறே வட்டம் y ஆயத்ததைத் தொடுமெனில் அதன் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + k^2 = 0.$$

4.3. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாடு g, f, c இயைபுள்ள அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் ஒரு வட்டத் திணை குறிக்கும்.

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

$$(x^2 + 2gx + g^2) + (y^2 + 2fy + f^2) = g^2 + f^2 - c.$$

$$(x+g)^2 + (y+f)^2 = (\sqrt{g^2 + f^2 - c})^2.$$

இச் சமன்பாட்டை,

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டு நோக்கில்,

$$h = -g, \quad k = -f, \quad a = \sqrt{g^2 + f^2 - c} \text{ என்றாகும்.}$$

எனவே, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாடு $(-g, -f)$ புள்ளியை மையமாகவும், $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ அல்லது ஆரமும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு: $x^2 + y^2 - c > 0$ எனில், ஆரம் மெய்யானது. $x^2 + y^2 - c = 0$ எனில், ஆரம் பூச்சியமாகும். அப்பொழுது வட்டம் மையப் புள்ளியை ஒன்றுபடும். அத்தகைய வட்டம் புள்ளி வட்டம் (point circle) எனப்படும். $x^2 + y^2 - c < 0$ எனில் ஆரம் கற்பனையாகும். அப்பொழுது வட்டம் மெய்யான மையமும், கற்பனையான ஆரமும் கொண்டிருக்கும்.

4.4. இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கத் தேவையான கட்டுப்பாடு

இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (1)$$

ஆகும்.

இதில் $a = b$, $h = 0$ எனில் சமன்பாடு (1)

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ என்கிறதும்.}$$

$$(அ-அ) \quad x^2 + y^2 + \frac{2g}{a}x + \frac{2f}{a}y + \frac{c}{a} = 0$$

$$(அ-அ) \quad x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0 \quad \dots (2)$$

ஆனால் சமன்பாடு (2) ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும் என்று பத்தி 4.8-இல் கண்டோம்.

எனவே, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு (general equation of second degree) ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கத் தேவையான கட்டுப்பாடுகள்.

$$(i) \quad x^2\text{-இன் கெழு} = y^2\text{-இன் கெழு}$$

$$(ii) \quad xy\text{-இன் கெழு} = 0.$$

ஒரு வட்டச் சமன்பாட்டின் தியம வடிவம் (standard equation of a circle).

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

4.5. கொடுத்தான மூன்று புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காணல்

வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \dots (1)$$

மாநிதி 1: $(-2, 3)$ புள்ளியை மையமாகவும், ஆரம் 5 ஆவதும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

மையம் (h, k) ; ஆரம் a எனில், சமன்பாடு

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2.$$

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2.$$

$$(அ-து) \quad x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0.$$

மாநிதி 2: $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க.

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$$

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = 15$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = 15 + 9 + 1$$

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

எனவே, வட்டத்தின் மையம் $(3, -1)$; ஆரம் 5.

மாநிதி 3: $(3, 4)$, $(0, 5)$, $(-3, -4)$ புள்ளிகள் வழி செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்க. கொடுத்துள்ள $(3, 4)$, $(0, 5)$, $(-3, -4)$ புள்ளிகள் வழி இவ் வட்டம் செல்வதால்,

$$9 + 16 + 6g + 8f + c = 0$$

$$(அ-து) \quad 6g + 8f + c = -25 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$0 + 25 + 0 + 10f + c = 0$$

$$(அ-து) \quad 10f + c = -25 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$9 + 16 - 6g - 8f + c = 0$$

$$(அ-து) \quad -6g - 8f + c = -25 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$(1)-இலிருந்து (2)-ஐக் கழிப்பின், $6g - 2f = 0 \quad \dots \quad (4)$$$

$$(2)-இலிருந்து (3)-ஐக் கழிப்பின், $6g + 18f = 0 \quad \dots \quad (5)$$$

சமன்பாடுகள் (4), (5)-இலிருந்து $g = 0$, $f = 0$

இம் மதிப்புகளை (1)-இல் பிரதியிடுவர், $c = -25$.

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$$x^2 + y^2 + 2(0)x + 2(0)y - 25 = 0$$

(அ-அ) $x^2 + y^2 = 25$.

மாதிரி 4: $lx + my = 1$ கோடு $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளை வெட்டும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x^2 + y^2)(am^2 - 2hbm + bl^2) + 2x(hm - bl) + 2y(bl - am) + (a + b) = 0$ என திறவுக.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு,

$$y - m_1x = 0, \quad y - m_2x = 0 \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$\therefore m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, \quad m_1m_2 = \frac{a}{b}.$$

$y - m_1x = 0, \quad y - m_2x = 0$ கோடுகள் $lx + my = 1$ என்ற கோட்டை வெட்டும் புள்ளிகள் A, B எனில் அமைவனின் ஆயத் தொலைகள் முறையே,

$$\left(\frac{1}{l + mm_1}, \frac{m_1}{l + mm_1} \right), \left(\frac{1}{l + mm_2}, \frac{m_2}{l + mm_2} \right)$$

எனவே, AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்,

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{1}{l + mm_1} \right) \left(x - \frac{1}{l + mm_2} \right) \\ & + \left(y - \frac{m_1}{l + mm_1} \right) \left(y - \frac{m_2}{l + mm_2} \right) = 0. \end{aligned}$$

இதைச் சுருக்கி,

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - x \left(\frac{1}{l + mm_1} + \frac{1}{l + mm_2} \right) \\ & - y \left(\frac{m_1}{l + mm_1} + \frac{m_2}{l + mm_2} \right) + \frac{1}{(l + mm_1)(l + mm_2)} \\ & + \frac{m_1m_2}{(l + mm_1)(l + mm_2)} = 0 \text{ ஆகும்.} \end{aligned}$$

$$(அ - து) \quad x^2 + y^2 = \left[\frac{2l + m(m_1 + m_2)}{(l + mm_1)(l + mm_2)} \right] x \\ - \left[\frac{l(m_1 + m_2) + 2mm_1m_2}{(l + mm_1)(l + mm_2)} \right] y + \frac{1 + m_1m_2}{(l + mm_1)(l + mm_2)} = 0.$$

$$(ஆ-து) \quad (l + mm_1)(l + mm_2)(x^2 + y^2) - [2l + m(m_1 + m_2)]x \\ - [l(m_1 + m_2) + 2mm_1m_2]y + (1 + m_1m_2) = 0. \quad (2)$$

$$(l + mm_1)(l + mm_2) = l^2 + lm(m_1 + m_2) + m^2m_1m_2 \\ = l^2 + lm \left(\frac{-2h}{b} \right) + m^2 \frac{a}{b} \\ = \frac{bl^2 - 2hlm + am^2}{b}$$

எனவே, சமன்பாடு (2)

$$\frac{bl^2 - 2hlm + am^2}{b} (x^2 + y^2) - \left[2l + m \left(\frac{-2h}{b} \right) \right] x \\ - \left[l \left(\frac{-2h}{b} \right) + 2m \frac{a}{b} \right] y + \left[1 + \frac{a}{b} \right] = 0.$$

$$(அ - து) \quad (x^2 + y^2)(am^2 - 2hlm + bl^2) + 2(hm - bl)x \\ + 2(hl - am)y + (a + b) = 0.$$

பயிற்சி 4.1.

1. பின்வரும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

- மையம் (3, -2); ஆரம் 3
- மையம் (3, 4); ஆரம் 5
- மையம் (a, b); ஆரம் (a+b).

2. பின்வரும் வட்டங்களின் மையமும், ஆரமும் காண்க.

- $x^2 + y^2 + 8x + 7y + 2 = 0$
- $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 7 = 0$
- $2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 8 = 0.$

3. மீள்வரும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
- (i) $(0, 1), (2, 3), (-2, 5)$
 (ii) $(10, 8), (-4, 4), (-4, 9)$
 (iii) $(2, 1), (1, 2), (3, 3)$.
4. ஆதிவழிச் செல்லும் வட்டம் ஆயங்களை ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகள் h, k எனில் அங்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
5. ஊரண்டு ஆயங்களைவிட, $x = c$ கோட்டையும் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?
6. $5x + y - 103 = 0, x - y - 11 = 0, 2x - 3y - 31 = 0$ என்ற கோடுகளால் அமையும் மூக்கோணத்தின் கற்ற வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
7. x ஆயத்தை $(x, 0)$ புள்ளியில் தொடும் ஒரு வட்டம் y ஆயத்தில் ஏற்படுத்தும் தாளின் தளம் $l (l > 0)$ எனில், அங்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. $x = 12, l = 10$ எனில் அங்வட்டம் யாது?
8. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தின் ஆதிநிலை மோக்கோணத்தை ஏற்கும் வட்ட நாய்கனாக்கு ஆதிநிலை ஒரு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் தம் தாண்டலின் அடிப்புள்ளிகளின் இவற்று வழி $x^2 + y^2 + gx + fy + c = 0$ என திறவுக.
9. $x + y = 6, 2x + y = 4, x + 2y = 5$ என்ற கோடுகளால் அமையும் மூக்கோணத்தின் கற்ற வட்ட மையமும் (circumcentre), ஆரமும் காண்க.
10. $2x - y = 0, x - 2y = 0, x + y = 1, x + y = 2$ என்ற கோடுகளால் அமையும் தாற்கரம் ஒரு வட்ட தாற்கரம் என திறவுக.
11. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ வட்டத்தின் மீதுள்ள $(4, 1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையமும் காண்க.

12. $(8, -1)$ புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டம் $4x - 3y = 5$ என்ற கோட்டைத் தொடுமேனின் அம் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
13. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தில் (x_1, y_1) -ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட தாளின் சமன்பாடு காண்க.
14. x ஆயத்தைத் தொடும் வட்டம் $(1, -2)$, $(3, -4)$ புள்ளிகளில் வழிச் செல்கிறது எனின் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
15. $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$ வட்டத்திற்கு x ஆயத்தின் கீழையாக உள்ள விட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. அக்கோடு வட்டத்தைச் சத்திக்கும் புள்ளிகள் யாவை?

வினாக்கள்

1. (i) $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 4 = 0$
 (ii) $x^2 + y^2 - 3x - 6y = 0$
 (iii) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 2c = 0$.
2. (i) $\left(-\frac{8}{2}, -\frac{7}{2}\right); \frac{5}{2}\sqrt{2}$
 (ii) $\left(\frac{3}{4}, -1\right); \frac{5}{4}$
 (iii) $\left(-\frac{3}{2}, -2\right); \frac{\sqrt{81}}{2}$.
3. (i) $3x^2 + 8y^2 + 2x - 20y + 17 = 0$
 (ii) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 6 = 0$
 (iii) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$.
4. $x^2 + y^2 - kx - ky = 0$.
5. $4x^2 + 4y^2 - 4cx - 4cy + c^2 = 0$.
6. $x^2 + y^2 - 14x - 6y - 111 = 0$.
7. $(x-a)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{b^2 + 4a^2}}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + 4a^2}{4}$;
 $x^2 + y^2 - 24x - 26y + 144 = 0$.

$$9. \left(\frac{17}{2}, \frac{19}{2} \right); \frac{15}{2} \sqrt{2}.$$

$$11. (-2, -7).$$

$$12. 25x^2 + 25y^2 - 150x + 50y + 214 = 0.$$

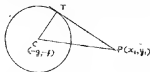
4-7. தொடுகோடு—ஊரையறை :



படம் 30.

ஏதேனும் ஒரு வளைவரையின் (curve) மீது A, B மிக அருகாமையிலுள்ள இரு புள்ளிகள் எனக்கொள்வோம். AB -ஐச் சேர்க்கவும். A -ஐ தொக்கி B நகர்த்து மூடியில் அத்தூடின் பொருத்தும்போது AB கோட்டின் நிலையை A -யின் அங்கவளைவரையின் தொடுகோடு என்கிறோம்.

4-8. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்திற்கு ஊரையப்படுகிற தொடுகோட்டின் நீளம்.



படம் 31.

வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடு PT என்கோம்.

வட்டம்

வட்ட மையம் $c(-g, -f)$

வட்டத்தின் ஆரம் $CT = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

CT, CP ஆகிய கோடுகள் செங்குத்தாகும்.

CTP என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$CP^2 = CT^2 + PT^2$$

$$(அ-ஆ) \quad PT^2 = CP^2 - CT^2$$

$$CP^2 = (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2$$

$$CT^2 = g^2 + f^2 - c$$

$$\therefore PT^2 = \{(x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2\} - \{g^2 + f^2 - c\}$$

$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

எனவே, தொடுகோட்டின் நீளம்,

$$PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

கிளை 1 : (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 = c^2$ வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோட்டின் நீளம்,

$$\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 - c^2)}$$

$$\text{குறிப்பு: } PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0$ எனில், $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வட்டத்திற்கு வெளியே இருக்கும்.

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ எனில், $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வட்டத்தின் மேலிருக்கும்.

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c < 0$ எனில் $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வட்டத்தின் உள்ளே இருக்கும். இத் தகவல்கள் வட்டத்திற்கும் தொடுகோடு வரையப்படாது. எனவே PT என்ற கோட்டை ஒரு கம்பியை தொடுகோடு எனக் கொள்ளவேண்டும்.

மாதிரி 5 : ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 4x + 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 6 = 0$ வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் அளவுகள் 1 : 2 விகிதத்திலிருப்பின் அப் புள்ளியின்

இயங்கு வழி ஒரு வட்டம் என நிறுவுக. அங் வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க.

$$x^2 + y^2 + 4x + 8 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 5 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து (1), (2) வட்டங்களுக்கு வரையப் படும் தொடுகோடுகளின் தீர்வு முறையே PT_1, PT_2 எனின்,

$$PT_1 = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + 4x_1 + 8)}$$

$$PT_2 = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 - 8x_1 + 5)}$$

$$\frac{PT_1}{PT_2} = \frac{1}{2} \quad \text{ஆதலால்} \quad \frac{PT_1^2}{PT_2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{x_1^2 + y_1^2 + 4x_1 + 8}{x_1^2 + y_1^2 - 8x_1 + 5} = \frac{1}{4}$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad 4x_1^2 + 4y_1^2 + 16x_1 + 12 = x_1^2 + y_1^2 - 8x_1 + 5$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad 3x_1^2 + 3y_1^2 + 22x_1 + 7 = 0.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ -இன் இயங்கு வழி,

$$3x^2 + 3y^2 + 22x + 7 = 0. \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடு (3)-இல் x^2 -இன் கெழு = y^2 -இன் கெழு.

$$x, y\text{-இன் கெழு} = 0$$

\therefore சமன்பாடு (3) ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

சமன்பாடு (3)-ஐப் பின் வருவது எழுதலாம்.

$$x^2 + y^2 + \frac{22}{3}x + \frac{7}{3} = 0.$$

$$\text{மையம் } (-g, -f) \quad (\text{அ} - \text{ஆ}) \quad \left(-\frac{11}{3}, 0\right)$$

$$\text{ஆரம்} = \sqrt{(g^2 + f^2 - c)},$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad \sqrt{\left(\frac{121}{9} - \frac{7}{3}\right)} = \frac{10}{3}.$$

4.9. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு.

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்பவை வட்டத்தின் மீது மிக அருகாமையிலுள்ள புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம்.

PQ -வின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1) \quad \dots \quad (1)$$

P , Q என்ற புள்ளிகள் வட்டத்தின்மீதுள்ளவை யாதலின்,

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0 \quad \dots \quad (3)$$

(2)-இலிருந்து (3)-ஐக் கழித்தால்,

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + 2g(x_1 - x_2) + 2f(y_1 - y_2) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) \\ + 2g(x_1 - x_2) + 2f(y_1 - y_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{(அ-து)} \quad (x_1 - x_2)[x_1 + x_2 + 2g] + (y_1 - y_2)[y_1 + y_2 + 2f] = 0.$$

$$\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = - \frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}.$$

இதை (1)-இல் பிரதிபலித்து,

$$y - y_1 = - \frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f} (x - x_1) \quad \dots \quad (4)$$

Q புள்ளி P புள்ளியை தொடுகிற முடிவில் அத்துடன் பொருந்துவதால் $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ ஆகும். இதை (4)-இல் பயன்படுத்தினால்,

$$y - y_1 = - \frac{x_1 + g}{y_1 + f} (x - x_1) \text{ என்கிறோம்.}$$

$$\text{(அ-து)} \quad (y - y_1)(y_1 + f) + (x - x_1)(x_1 + g) = 0$$

(அ-து) $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$
இருபக்கமும் $gx_1 + fy_1 + c$ -ஐக் கூட்டி,

$$\begin{aligned} xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c \\ = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \end{aligned}$$

[சமன்பாடு (2)-இன் படி].

எனவே, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு

$$xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$$

கோடு : $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$.

4.10. $y = mx + c$ கோடும், $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள்

$$y = mx + c \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

இவைகள் வெட்டும் புள்ளிகள் இரு வளைவரையினாலும் இருபுறமும் இப் புள்ளிகளைச் சமன்பாடுகள் (1), (2)-ஐத் தீர்வு காண்பதன் மூலம் பெறலாம்.

(1)-இல் y -யின் மதிப்பை (2)-இல் பிரதியிடுவர்,

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2$$

$$(அ - ௧) \quad x^2(1 + m^2) + 2mcx + (c^2 - a^2) = 0. \dots (3)$$

இது x -இல் இருபடிச் சமன்பாடாகலால் x -க்கு இரு மதிப்புகள் உண்டு. எனவே, (1) குறிக்கும் கோடு (2) குறிக்கும் வட்டத்தை இரு புள்ளிகளில் வெட்டும். இப்புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள் சமன்பாடு (3)-இன் மூலங்களாகும்.

(3)-இன் தன்மைக் காட்டி (Discriminant)

$$(2mc)^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - a^2) \text{ ஆகும்.}$$

$$(அ - ௨) \quad a^2(1 + m^2) - c^2.$$

இதன் மதிப்பைப் பொறுத்து வெட்டும் புள்ளிகள் மெய்யானவைவாகவேன, பொருத்துவனவாகவேன, கற்பனைவாகவேன ஆவனவாம்.

(அ - ௩) $a^2(1 + m^2) - c^2 > 0$ எனில், புள்ளிகள் மெய்யானவை.

$a^2(1 + m^2) - c^2 = 0$ எனில், பொருத்தும் புள்ளிகளாகும்.

$a^2(1 + m^2) - c^2 < 0$ எனில், கற்பனைப் புள்ளிகளாகும்.

4.11. $y = mx + c$ கோடும், $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள் செங்கும் கோட்டின் தளம்

$$y = mx + c \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்ற கோடு,

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ எனக் கொள்வோம்.

A , B புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகள் பின்வரும் சமன்பாட்டி-
லிருந்து கிடைக்கப் பெறும்.

$$x^2(1 + m^2) - 2mcx + (c^2 - a^2) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

[பத்தி 4-10, சமன்பாடு 3]

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{2mc}{1+m^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{c^2 - a^2}{1+m^2}$$

மேலும், A , B புள்ளிகள் $y = mx + c$ கோட்டின்மீதும் அமைந்-
திருப்பதால்,

$$y_1 = mx_1 + c, \quad y_2 = mx_2 + c$$

$$\therefore y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2),$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2 \\ &= (1 + m^2)(x_1 - x_2)^2 \\ &= (1 + m^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] \\ &= (1 + m^2) \left[\frac{4m^2 c^2}{(1 + m^2)^2} - \frac{4(c^2 - a^2)}{(1 + m^2)} \right] \\ &= \frac{4m^2 c^2}{1 + m^2} - 4(c^2 - a^2) \\ &= \frac{4m^2 c^2 - 4(c^2 - a^2)(1 + m^2)}{1 + m^2} \\ &= \frac{4m^2 c^2 - 4(c^2 + m^2 c^2 - a^2 - a^2 m^2)}{1 + m^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{4(a^2 + a^2 m^2 - c^2)}{1 + m^2}$$

$$= \frac{4[a^2(1 + m^2) - c^2]}{1 + m^2}$$

எனவே தீர்வு,

$$AB = 2 \sqrt{\frac{a^2(1 + m^2) - c^2}{1 + m^2}}.$$

4.12. $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு $y = mx + c$ என்ற கோடு தொடுகோடாகாததற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு.

$$y = mx + c \quad \dots \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \dots \quad (2)$$

(1), (2) வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள் சீர்தவறும் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும்.

$$x^2(1 + m^2) + 2max + (c^2 - a^2) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

[பத்தி 4.10, சமன்பாடு 3] வெட்டும் புள்ளிகள் இரண்டும் பொருத்தும் புள்ளிகளெனில், கோடு (1), வட்டம் (2)-க்குத் தொடுகோடாகும்.

(அ-து) கோடு (1), வட்டம் (3)-க்குத் தொடுகோடெனில், சமன்பாடு (3)-இன் மூலங்கள் சமமாகும்.

எனவே, சமன்பாடு (3)-இன் தன்மைக் கரட்டி பூச்சியமாகும்

$$\therefore 4m^2c^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - a^2) = 0$$

$$(அ-து) \quad a^2(1 + m^2) - c^2 = 0$$

$$\therefore c^2 = a^2(1 + m^2),$$

$$(அ-து) \quad c = \pm a\sqrt{1 + m^2}.$$

எனவே, $y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}$ என்ற இரு கோடுகளும் m -இன் குறிவந்து மதிப்புகளுக்கும் $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் தொடுகோடுகளாகும்.

மீதிறொரு முறை

$x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து தொடு
கோடு $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$.

$$(அ - இ) \quad y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{a^2}{y_1}$$

இதை $y = mx + c$ லில் ஒப்பிடுவர்.

$$m = -\frac{x_1}{y_1} \quad (i), \quad c = \frac{a^2}{y_1} \quad (ii)$$

$$(அ - இ) \quad x_1 = -my_1$$

(x_1, y_1) புள்ளி $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் மீதுள்ளதாகும்.

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2$$

$$(அ - இ) \quad m^2 y_1^2 + y_1^2 = a^2$$

$$y_1^2 (1 + m^2) = a^2$$

$$\therefore 1 + m^2 = \frac{a^2}{y_1^2} \quad (அ - இ) \quad \sqrt{1 + m^2} = \frac{a}{y_1}$$

$$\text{ஆனால், (ii) இல் இது } c = \frac{a^2}{y_1} = a\sqrt{1 + m^2}$$

எனவே, $y = mx + c$, $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்குத் தொடு
கோடு வர, தேவையான கட்டுப்பாடு,

$$c = a\sqrt{1 + m^2}$$

$$\text{மேலும் } y_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad x_1 = -my_1 = -\frac{am}{\sqrt{1 + m^2}}$$

\therefore கோடு வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளி,

$$\left(\frac{-am}{\sqrt{1 + m^2}}, \frac{a}{\sqrt{1 + m^2}} \right)$$

மீதிறொரு முறை

$y = mx + c$ (1) கோட்டிற்கு $x^2 + y^2 = a^2$ (2) வட்டத்
தின் மையத்திலிருந்து (1)-க்கு வரையடிச் செங்குத்துக் கோட்டின்

தீர்மானம் (2)-இன் ஆரத்திற்குச் சமமெனில் கோடு (1), வட்டம் (2)-க்குத் தொடுகோடாகும்.

வட்டம் (2)-இன் ஆரம் a

வட்டம் (2)-இன் மையம் $(0, 0)$ -விலிருந்து $y = mx + c$ கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் தீர்மானம் $\frac{c}{\pm \sqrt{1+m^2}}$

$$\therefore a = \frac{c}{\pm \sqrt{1+m^2}}$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad c = \pm a \sqrt{1+m^2}$$

எனவே, தேவைவரான கட்டுப்பாடு $c = \pm a \sqrt{1+m^2}$.

4-13. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2$ வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையக்கூடும்.

புள்ளி (x_1, y_1) எனவும், வட்டம் $x^2 + y^2 = a^2$ எனவும் கொள்வோம்.

$x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$ (மேலே ஒரு மாறி)

இது (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் சென்றால்,

$$y_1 = mx_1 + a\sqrt{1+m^2}$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad (y_1 - mx_1)^2 = a^2(1+m^2)$$

$$\therefore m^2(x_1^2 - a^2) - 2x_1y_1m + (y_1^2 - a^2) = 0.$$

இது m -இல் இருபடிச் சமன்பாடு. எனவே m -க்கு இரு மதிப்புகள் உண்டு. m -இன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒரு தொடுகோடாக இரு தொடுகோடுகள் உண்டு.

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையக்கூடும்.

மாநிச் 6: $8x - 4y - 7 = 0$ கோட்டிற்கு இணையாக $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

$$(அ - ஆ) (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8^2 \quad \dots \quad (1)$$

$8x - 4y - 7 = 0$ கோட்டிற்கினையாக வரையப்படும் தொடுகோடு $8x - 4y + k = 0$ ஆகும். $\dots \dots (2)$

வட்ட மையம் $(1, 2)$ -இலிருந்து $8x - 4y + k = 0$ -க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்,

$$\frac{8(1) - 4(2) + k}{\pm \sqrt{8^2 + 4^2}} \quad (அ-ஆ) \quad \frac{k - 5}{\pm 5}$$

இது வட்ட ஆரத்திற்குச் சமமாகலாம்,

$$\frac{k - 5}{\pm 5} = 8$$

$$\therefore k = 5 \pm 15$$

$$(அ - ஆ) \quad k = 20, -10.$$

எனவே, தொடு கோட்டின் சமன்பாடு,

$$8x - 4y + 20 = 0$$

$$8x - 4y - 10 = 0.$$

மாதிரி 7 : $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் தொடுகோடுகளுக்கு $(a, 0)$ புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகளின் இயங்குவழி.

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2[y^2 + (a - x)^2]$$

என நினைவுக.

$x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் தொடுகோடு

$$y - mx + a\sqrt{1 + m^2} \quad \dots \quad (1)$$

இத் தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தாக $(a, 0)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - 0 = -\frac{1}{m}(x - a)$$

$$(அ - ஆ) \quad y = -\frac{1}{m}(x - a) \quad \dots \quad (2)$$

இவைகள் இரண்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனில், (x_1, y_1) -இன் இயங்கு வழிக் காணச் சமன்பாடுகள் (1), (2)-இனிந்தது m -ஐ நீக்கவேண்டும்.

$$(2)\text{-இனிந்தது } m = \frac{a-x_1}{y_1}$$

இதை (1)-இல் பிரதியிடுவோம்,

$$y_1 = \frac{a-x_1}{y_1} x_1 + a \sqrt{1 + \left(\frac{a-x_1}{y_1} \right)^2}$$

$$(அ-ஆ) \quad y_1^2 = (a-x_1)x_1 + a\sqrt{y_1^2 + (a-x_1)^2}$$

$$\therefore (x_1^2 + y_1^2 - ax_1) = a\sqrt{y_1^2 + (a-x_1)^2}$$

$$(அ-ஆ) \quad (x_1^2 + y_1^2 - ax_1)^2 = a^2[y_1^2 + (a-x_1)^2]$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2[y^2 + (a-x)^2].$$

மாதிரி 8 : $y = mx + c$ கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தில் ஏற்படுத்தும் நாணின் நீளம் $2b$ எனில், $c^2 = (1+m^2)(a^2-b^2)$ என திருவுக.

பதில் 4.11-இன் படி நாணின் நீளம்,

$$\frac{2\sqrt{a^2(1+m^2)} - c^2}{1+m^2}.$$

இது $2b$ -க்குச் சமமெனில்,

$$\frac{2\sqrt{a^2(1+m^2)} - c^2}{1+m^2} = 2b$$

$$(அ-ஆ) \quad \sqrt{a^2(1+m^2)} - c^2 = b^2(1+m^2).$$

$$\therefore a^2(1+m^2) - c^2 = b^2(1+m^2)$$

$$\therefore c^2 = a^2(1+m^2) - b^2(1+m^2)$$

$$(அ-ஆ) \quad c^2 = (1+m^2)(a^2-b^2).$$

மாதிரி 3: (1, 2) புள்ளி வழிச் செல்லும் வட்டம் இரண்டு ஆயங்கிலையும் தொடுகிறதெனில், அங் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இது x ஆயத்தைத் தொடுமெனில் (1)-இன் மையத்தின் y ஆயத் தொடுவ அந் ஆரத்திற்குச் சமமாகும்.

$$\therefore -f = \sqrt{g^2 + f^2 - c^2}$$

$$(அ.து) \quad f^2 = g^2 + f^2 - c \quad \text{அல்லது} \quad g^2 - c = 0 \quad \dots \quad (2)$$

இவ்வாறே வட்டம் y ஆயத்தைத் தொடு மெனில்,

$$g^2 = g^2 + f^2 - c \quad \text{அல்லது} \quad f^2 - c = 0 \quad \dots \quad (3)$$

வட்டம் (1), புள்ளி (1, 2) வழிச் செல்லுவதால்,

$$1 + 4 + 2g + 4f + c = 0. \quad \dots \quad (4)$$

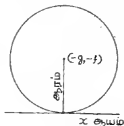
சமன்பாடுகள் (2), (3), (4)-ஐ விடுவிப்பீன்.

$$g = -1, f = 1, c = 1; \quad g = 5, f = -5, c = 25$$

எனவே, வட்டம்

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0.$$



4-14. செங்கோடு (Normal)

வரையறை : ஒரு வளைவரைக்கு P புள்ளியிலிருந்து தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தான P வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு P -மீட்டத்துச் செங்கோடு எனப்படும்.

4-15. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்திற்கு $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு.

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (1)$$

வட்டத்திற்கு $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு.

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \quad \dots (2)$$

$$(அ - ஆ) \quad x(x_1 + g) + y(y_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0$$

$$\therefore \text{தொடுகோட்டின் சரிவு} = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}.$$

$$\text{எனவே, செங்கோட்டின் சரிவு} = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}.$$

செங்கோடு $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லுதல் P மீட்டத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு.

$$y - y_1 = \frac{y_1 + f}{x_1 + g} (x - x_1)$$

$$(அ - ஆ) - (x_1 + g)(y - y_1) + (y_1 + f)(x - x_1) = 0$$

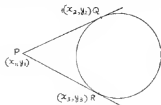
$$(அ - ஆ) \quad x(y_1 + f) - y(x_1 + g) + (gy_1 - fx_1) = 0.$$

இவை : $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு $P(x_1, y_1)$ புள்ளி மீட்டத்துச் செங்கோடு $x_1y - xy_1 = 0$.

4-16. தொடுகோடுகளின் தொடு நான்-வரையறை (chord of contact of tangents)

ஒரு வட்டத்திற்கும் புறத்தே உள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து, வட்டத்திற்கு வரையப்படும் PQ , PR என்ற தொடுகோடுகளின் தொடு புள்ளிகள் Q , R ஆகச் செங்குத்துக் கோடு தொடுகோடுகளின் தொடுநான் எனப்படும்.

4.17. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்திற்கு $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடு தளம் சமன்பாடு.



படம் 33.

$$\text{வட்டம் } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (1)$$

P, Q, R என்ற புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைவுக் மூன்றையும் $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ எனக் கொள்வோம்.

$Q(x_2, y_2)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$xx_2 + yy_2 + g(x + x_2) + f(y + y_2) + c = 0$$

இது, $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore x_1x_2 + y_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c = 0 \quad (2)$$

$R(x_3, y_3)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$xx_3 + yy_3 + g(x + x_3) + f(y + y_3) + c = 0$$

இது, $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore x_1x_3 + y_1y_3 + g(x_1 + x_3) + f(y_1 + y_3) + c = 0 \quad (3)$$

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \quad (4)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இச்சமன்பாடு குறிக்கும் கோடு (2)-இன்படி $Q(x_2, y_2)$ வழியும், (3)-இன்படி $R(x_3, y_3)$ வழியும் செல்கிறது.

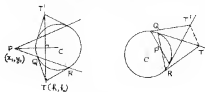
எனவே, QR -இன் சமன்பாடு,

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \text{ ஆகும்.}$$

4.18. இசைப் புள்ளியும், இசைக் கோடும் (Pole and Polar)

வரையறை : வட்டத்தினுள்ளே அல்லது வெளியே உள்ள P புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு வட்டத்தை Q, R புள்ளிகளில் வெட்டினால், Q, R புள்ளிகளிடத்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழி, புள்ளி P -யின் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக்கோடாகும். P புள்ளி இசைக் கோட்டின் இசைப் புள்ளி எனப்படும்.

4.19. (x_1, y_1) புள்ளியின் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக் கோட்டின் சமன்பாடு



படம் 84.

$P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்லும் கோடு வட்டத்தை Q, R புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம். Q, R புள்ளிகளிடத்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடு கோடுகள் $T(h, k)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன எனக் கொள்வோம்.

Q, R என்னும் கோடு $T(h, k)$ -யிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண். எனவே, Q, R -இன் சமன்பாடு,

$$xh + yk + g(x + h) + f(y + k) + c = 0$$

இது $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore x_1h + y_1k + g(x_1 + h) + f(y_1 + k) + c = 0.$$

எனவே, $T(h, k)$ புள்ளியில் இயங்கு வழி

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

∴ $P(x_1, y_1)$ புள்ளியில் இசைக்கோடு,

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

இதன் : $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தைச் சார்ந்த $P(x_1, y_1)$ புள்ளியில் இசைக்கோடு $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$.

4-20. $lx + my + n = 0$ கோட்டிற்கு $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளி.

$$lx + my + n = 0 \quad \dots \quad (1)$$

கோட்டின் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக்கொள்ளலாம்.

இப் புள்ளியில் $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக்கோடு $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0 \quad \dots \quad (2)$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கோட்டிற்கு குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{l}{x_1} = \frac{m}{y_1} = \frac{-n}{-a^2}$$

$$\text{எனவே, } x_1 = \frac{-a^2 l}{n}, \quad y_1 = \frac{-a^2 m}{n}.$$

∴ $lx + my + n = 0$ கோட்டின் இசைப்புள்ளி,

$$\left(\frac{-a^2 l}{n}, \frac{-a^2 m}{n} \right).$$

4-21. $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு $Q(x_2, y_2)$ புள்ளி வழிச் செல்லும். Q -வின் இசைக்கோடு P வழிச் செல்லும்.

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \dots \quad (1)$$

வட்டத்தைச் சார்ந்த $P(x_1, y_1)$ புள்ளியில் இசைக்கோடு

$$xx_1 + yy_1 - a^2 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

இது $Q(x_2, y_2)$ வழிச் செல்லும்.

$$\therefore x_2x_1 + y_2y_1 - a^2 = 0 \quad \dots \quad (8)$$

$Q(x_2, y_2)$ புள்ளியின் (1)-ஐச் சாத்தி இசைக்கோடு

$$xx_2 + yy_2 - a^2 = 0 \quad \dots \quad (4)$$

இது (8)-இன்படி $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும்.

4.22. துணையிவப் புள்ளிகளும், துணையிவக் கோடுகளும் (conjugate points, conjugate lines)

ஏதேனும் இரு புள்ளிகளில், ஒரு வட்டத்தைச் சாத்தி ஒன்றின் இசைக்கோடு மற்றதன் வழிச் செல்வின், அப்புள்ளிகளினாலும் வட்டத்தைச் சாத்தி துணையிவப்புள்ளிகள் எனப்படும்.

ஏதேனும் இரு கோடுகளில் ஒரு வட்டத்தைச் சாத்தி ஒன்றின் இசைப்புள்ளி மற்றதன் மேற்குப்பின் அல்லாது கோடுகளும் துணையிவக் கோடுகள் எனப்படும்.

4.23. $l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ என்ற இரு கோடுகளும் $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் சாத்தி துணையிவக் கோடுகளாக இருப்பதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு.

$l_1x + m_1y + n_1 = 0$ என்ற கோட்டின் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

$$\text{எனவே, பத்தி 4.21-இன் படி } x_1 = \frac{-a^2 l_1}{n_1}, y_1 = \frac{-a^2 m_1}{n_1}.$$

இப்புள்ளி $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ கோட்டின் மீதுகுப்பின்,

$$l_2 \left(\frac{-a^2 l_1}{n_1} \right) + m_2 \left(\frac{-a^2 m_1}{n_1} \right) + n_2 = 0$$

$$\therefore a^2 - l_1 l_2 - a^2 m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$

$$(அ - டு) \quad a^2 l_1 l_2 + a^2 m_1 m_2 = n_1 n_2$$

கோடு l -இன் இசைப் புள்ளி கோடு l' -இல் இருப்பின், l' -இன் இசைப்புள்ளி கோடு l -இல் இருக்கும்.

4.24. குறிப்பிட்டு முறை (Notation)

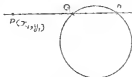
$$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ எனில்,}$$

$$S_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c,$$

$$T = xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$

எனக் கொள்வோம்.

4-25. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்திற்கு வரையுமிருக்கிற கோடுகளைக் காட்டுக.



படம் 35.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x - x_1}{\cos \theta} = \frac{y - y_1}{\sin \theta} = r \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இக்கோட்டின் மீதுள்ள வாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta)$ ஆகும்.

இக் கோடு வட்டத்தைச் சந்திக்குமிடங்களில்,

$$(x_1 + r \cos \theta)^2 + (y_1 + r \sin \theta)^2 + 2g(x_1 + r \cos \theta) + 2f(y_1 + r \sin \theta) + c = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad r^2 + 2r[(x_1 + g) \cos \theta + (y_1 + f) \sin \theta] \\ + x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \dots (2) \end{aligned}$$

இது r -இல் இருபடிச் சமன்பாடு. எனவே, r இரு மதிப்புகள் கொண்டிருக்கும். அவைகளை r_1, r_2 எனக் கொண்டால், r_1, r_2 என்பவை P -லிருந்து கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளான Q, R -இன் தூரங்களைக் கொடுக்கும்.

Q, R புள்ளிகள் Q மீல் பொருத்தும் புள்ளிகளெனில் நான் QR, Q இடத்துத் தொடுகோடாகும்.

$$\therefore r_1 = r_2.$$

(அ-து) சமன்பாடு (2)-இன் மூலங்கள் சமம். எனவே, (2)-இன் தன்மைக் காட்டி (discriminant) பூச்சியமாகும்.

$$\begin{aligned} \text{எனவே, } 4[(x_1 + g) \cos \theta + (y_1 + f) \sin \theta]^2 \\ = 4(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) \end{aligned}$$

$$(அ - ஆ) \quad [(x_1 + g) \cos \theta + (y_1 + f) \sin \theta]^2 = S_1 \quad \dots (8)$$

$$(1) - இக்குத்து \cos \theta = \frac{x - x_1}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y - y_1}{r},$$

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

இதை (8) - இல் பிரதியிடுவர்

$$\left[(x_1 + g) \frac{x - x_1}{r} + (y_1 + f) \frac{y - y_1}{r} \right]^2 = S_1$$

$$\begin{aligned} (அ - ஆ) \quad [(x - x_1)(x_1 + g) + (y - y_1)(y_1 + f)]^2 = r^2 S_1 \\ = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] S_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (அ - ஆ) \quad [(xx_1 + yy_1 + gx + fy) - (x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1)]^2 \\ = [(x^2 + y^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2(xx_1 + yy_1)] S_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (அ - ஆ) \quad [(xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c) \\ - (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \{(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) + (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) \\ - 2[xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c]\} S_1 \end{aligned}$$

$$\therefore [T - S_1]^2 = [S + S_1 - 2T] S_1$$

$$T^2 + S_1^2 - 2TS_1 = SS_1 + S_1^2 - 2TS_1$$

$$(அ - ஆ) \quad T^2 = SS_1$$

எனவே, இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

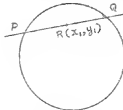
$$T^2 = SS_1$$

(அகம்சம்)

$$\begin{aligned} [xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c]^2 \\ = (x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) \end{aligned}$$

4.26. (x_1, y_1) -ஐ நடுப் புள்ளியாக கொண்ட வட்டத்தின் நான் வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

நான் PQ , அதன் நடுப் புள்ளி $R(x_1, y_1)$ எனக் கொள்வோம்.



படம் 38.

$R(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x-x_1}{\cos \theta} = \frac{y-y_1}{\sin \theta} = r \quad \dots \quad (1)$$

என்போம்.

இக் கோட்டின்மீதுள்ள வாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆவத் தொலைவு, $(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta)$.

இக் கோடு வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டும் எனக் கொள்வோம். வட்டத்தை வெட்டுமிடங்களில்,

$$(x_1 + r \cos \theta)^2 + (y_1 + r \sin \theta)^2 + 2g(x_1 + r \cos \theta) + 2f(y_1 + r \sin \theta) + c = 0.$$

$$\begin{aligned} (\text{அ} - \text{ஆ}) \quad r^2 + 2[(x_1 + g) \cos \theta + (y_1 + f) \sin \theta]r \\ + (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) = 0 \quad \dots (2) \end{aligned}$$

இது r -இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின், r இரு மதிப்புகள் கொண்டிருக்கும். அவை r_1, r_2 என்போம். r_1, r_2 என்பனவ (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து Q, P புள்ளிகளின் தூரங்களைக் கொடுக்கும்.

PQ -யின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) ஆதலால்,

$$r_1 + r_2 = 0.$$

(அ - ஐ) சமன்பாடு (2)-இன் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை எடுத்தெடுக்கப்படும்.

$$\therefore (x_1 + g) \cos \theta + (y_1 + f) \sin \theta = 0 \quad \text{--- (3)}$$

$$(\text{அ - இ}) \text{ இங்கு } \frac{x - x_1}{r} = \cos \theta, \quad \frac{y - y_1}{r} = \sin \theta$$

இதை (3)-இல் பிரதியிடுவர்,

$$(x_1 + g) \left(\frac{x - x_1}{r} \right) + (y_1 + f) \left(\frac{y - y_1}{r} \right) = 0$$

$$(\text{அ - ஐ}) \quad (x_1 + g)(x - x_1) + (y_1 + f)(y - y_1) = 0$$

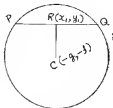
$$\therefore xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$$

இருபக்கமும் $gx_1 + fy_1 + c$ ஐக் கூட்டி,

$$\begin{aligned} xx_1 + yy_1 + gx + fy + c &= x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1 + c \\ &= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \end{aligned}$$

$$(\text{அ - ஐ}) \quad T = S_1.$$

தீர்மான முறை



படம் 87.

கூட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனில்,

கூட்ட மையம் $(-g, -f)$

c வட்டமையிடை எனவும், தான் PQ எனவும் கொள்வோம்.

தானின் துன்புள்ளி $R(x_1, y_1)$

$$CR\text{-இன் சரிவு} = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}$$

$$\therefore PQ\text{-இன் சரிவு} = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f} \quad (\because PQ \perp CR)$$

$\therefore PQ$ -இன் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f} (x - x_1)$$

$$(அ - ஆ) \quad (x - x_1)(x_1 + g) + (y - y_1)(y_1 + f) = 0,$$

$$\therefore xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$$

இரு பக்கமும் $gx_1 + fy_1 + c$ -ஐக் கூட்ட.

$$\begin{aligned} xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c \\ = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \end{aligned}$$

$$(அ - ஆ) \quad T = S_1.$$

மாதிரி 10: $x + 7y - 11 = 0$, $3x + y - 2 = 0$ என்ற கோடுகள் $x^2 + y^2 = 8x - 8y + 5 = 0$ வட்டத்தைச் சார்ந்து இணைவிக் கோடுகள் என நிறுவுத.

$$x + 7y - 11 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இணைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

$$(x_1, y_1) \text{ புள்ளியின் } x^2 + y^2 - 8x - 8y + 5 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

வட்டத்தைச் சார்ந்த இணைக்கோடு.

$$xx_1 + yy_1 - 8(x + x_1) - 8(y + y_1) + 5 = 0.$$

$$(அ-ஆ) \quad x(x_1 - 8) + y(y_1 - 8) - (8x_1 + 8y_1 - 5) = 0 \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (3) ஒரே கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{x_1 - 8}{1} = \frac{y_1 - 8}{7} = \frac{8x_1 + 8y_1 - 5}{11}$$

$$\text{முதலிரு விவிலக்கங்களிலிருந்து } 7x_1 - 21 = y_1 - 8$$

$$(அ - து) \quad 7x_1 + y_1 = 18 \quad \dots \quad (4)$$

இவ்வாறு மூன்றுவது வீதிதரக்களிகிறது.

$$11y_1 - 88 = 21x_1 + 81y_1 - 85$$

$$(அ-து) \quad 81x_1 + 10y_1 = 3 \quad \dots \quad (5)$$

சமன்பாடுகள் (4), (5)-ஐ விடுவிப்பின் $x_1 = 2$, $y_1 = -4$.

எனவே, கோடு (1)-இன் வட்டம் (2) ஐச் சேர்ந்த இசைப்புள்ளி $(2, -4)$.

இப்புள்ளி $8x + y - 2 = 0$ என்ற கோட்டின் மீதுள்ளது கண்கூடாகும்.

எனவே, $x - 7y - 11 = 0$, $8x + y - 2 = 0$ என்பவை வட்டம் (2)-ஐச் சேர்ந்த துணைவிக் கோடுகளாகும்.

மாதிரி 11 : $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தில் தான் (h, k) புள்ளியில் செங்கோணத்தை ஏற்றமெனின், அந்தநாணின் இசைப்புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

தான் AB எனவும், அதன் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்வோம்.

$$(x_1, y_1) \text{ புள்ளியின் } x^2 + y^2 = a^2 \quad \dots \quad (1)$$

வட்டத்தைச் சேர்ந்த இசைக் கோடு $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$.

$$(அ - து) \quad AB\text{-யின் சமன்பாடு } xx_1 + yy_1 - a^2 = 0. \dots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-இலிருந்து இவ்விருவ் வட்டமும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளைப் பெறலாம். வெட்டுப் புள்ளிகள் A, B ஆகும். அவைகளின் ஆயத் தொலைகள் மூன்றாவே (x_2, y_2) , (x_3, y_3) என்போம்.

$$(2)\text{-இலிருந்து } y = \frac{a^2 - xx_1}{y_1}$$

$$\text{இதை (1)-இல் பிரதியிட } x^2 + \left(\frac{a^2 - xx_1}{y_1} \right)^2 = a^2$$

(அ - ஐ) $x^2(x_1^2 + y_1^2) - 2a^2x_1x + a^2(a^2 - y_1^2) = 0$.
இது x -இல் இருபடிச் சமன்பாடு. இதன் மூலங்கள் A, B புள்ளிகளின் x ஆயத் தொகையாகும்.

$$\therefore x_2 + x_3 = \frac{2a^2x_1}{x_1^2 + y_1^2} \text{ (i); } x_2x_3 = \frac{a^2(a^2 - y_1^2)}{x_1^2 + y_1^2} \text{ (ii)}$$

$$\text{இம்மாதிரி } y_2 + y_3 = \frac{2a^2y_1}{x_1^2 + y_1^2} \text{ (iii); } y_2y_3 = \frac{a^2(a^2 - x_1^2)}{x_1^2 + y_1^2} \text{ (iv).}$$

CH, k புள்ளியில் AB ஏற்றும் கோணம் 90° ஆகவே CA, CB கோடுகள் நம்முள் செங்குத்தானவை.

$$CA\text{-இன் சரிவு } \frac{y_1 - k}{x_2 - h}$$

$$CB\text{-இன் சரிவு } \frac{y_3 - k}{x_3 - h}.$$

$$\therefore \frac{y_1 - k}{x_2 - h} \cdot \frac{y_3 - k}{x_3 - h} = -1 \quad [\because CA \perp CB]$$

$$(அ - ஐ) (x_1 - h)(x_3 - h) + (y_1 - k)(y_3 - k) = 0.$$

$$(அ - ஐ) x_2x_3 - h(x_2 + x_3) + h^2 + y_2y_3 - k(y_2 + y_3) + k^2 = 0$$

இதில் (i), (ii), (iii), (iv)-ஐப் பிரதியிடுக.

$$\begin{aligned} & \frac{a^2(a^2 - y_1^2)}{x_1^2 + y_1^2} - h \frac{2a^2y_1}{x_1^2 + y_1^2} + h^2 + \frac{a^2(a^2 - x_1^2)}{x_1^2 + y_1^2} \\ & - k \frac{2a^2x_1}{x_1^2 + y_1^2} + k^2 = 0. \end{aligned}$$

$$(அ - ஐ) (h^2 + k^2)(x_1^2 + y_1^2) - 2a^2(x_1k + y_1h) - a^2(x_1^2 + y_1^2 - 2a^2) = 0$$

$$(அ-ஐ) (x_1^2 + y_1^2)(h^2 + k^2 - a^2) - 2a^2(x_1k + y_1h - a^2) = 0.$$

எனவே, (x_1, y_1) -இன் இயங்கு வர்த

$$(x^2 + y^2)(h^2 + k^2 - a^2) = 2a^2(xk + yh + a^2).$$

4. வி. - 8

மாதிரி 12 : ஒரு புள்ளியிலிருந்து $(x^2+y^2+2gx+2fy+c=0)$ வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்து எனில், ஆய்நிலையின் இயங்கு வழி $x^2+y^2+2gx+2fy+2c-g^2-f^2=0$ என நிறுவுக.

$$\text{வட்டம் } x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \dots \dots (1)$$

புள்ளி $P(x_1, y_1)$ -யிலிருந்து வட்டம் (1)-க்குத் தொடுகோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்வோம்.

இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு,

$$T^2 = SS_1$$

$$\begin{aligned} (\text{அ} - \text{ஆ}) \quad [xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c]^2 \\ = (x^2+y^2+2gx+2fy+c)(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c). \end{aligned}$$

இதில் x^2 -இன் கெழு $= (x_1+g)^2 - (x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c)$.

$$y^2\text{-இன் கெழு} = (y_1+f)^2 - (x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c).$$

இரட்டைத் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்துச் செல்வதிக் கொள்ளுமெனின்,

$$x^2\text{-இன் கெழு} + y^2\text{-இன் கெழு} = 0.$$

$$\therefore (x_1+g)^2 + (y_1+f)^2 - 2(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c) = 0$$

$$\begin{aligned} (\text{அ} - \text{ஆ}) \quad (x_1+g)^2 + (y_1+f)^2 \\ = 2(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+g^2+f^2 \\ = 2(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c) \end{aligned}$$

$$\therefore x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+2c-g^2-f^2=0$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$x^2+y^2+2gx+2fy+2c-g^2-f^2=0$$

மாதிரி 13 : $x^2+y^2-5x+y-14=0$ வட்டத்திற்கு $(2, -5)$ புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடும், செங்கோடும் காண்க.

$$\text{வட்டம் } x^2+y^2-5x+y-14=0.$$

(அ - ஆ) $(2, -5)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$x.2 + y(-5) - \frac{5}{2}(x+2) + \frac{1}{2}(y-5) - 14 = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad 2x - 5y - \frac{5}{2}x - 5 + \frac{1}{2}y - \frac{5}{2} - 14 = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad 4x - 10y - 5x - 10 + y - 5 - 28 = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad x + 9y + 43 = 0.$$

எனவே, $(2, -5)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$x + 9y + 43 = 0.$$

$$\text{தொடுகோட்டின் சரிவு} = -\frac{1}{9}$$

எனவே, செங்கோட்டின் சரிவு = 9.

∴ $(2, -5)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு,

$$y + 5 = 9(x - 2)$$

$$(அ - ஆ) \quad 9x - y - 28 = 0.$$

மாதிரி 11: $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் சாத்த (h, k) புள்ளியின் இசைக்கோடு $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைத் தொடுமெனில், $a^2 - 2ah - k^2 = 0$ என நிறுவுக.

$x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் சாத்த (h, k) புள்ளியின் இசைக்கோடு $xh + yk - a^2 = 0$ (1)

இது $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ (2)
வட்டத்தைத் தொடுமெனின் (2)-இன் மையத்திலிருந்து (1)-க்கு வரையறுக்கப்பட்ட கோட்டின் நீளம் (2)-இன் ஆரத்திற்குச் சமம்.

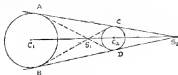
$$\therefore \frac{ah+0-a^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = a$$

$$(அ - ஆ) \quad a(h-a) = a\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\therefore (h-a)^2 = h^2 + k^2$$

$$(அ - ஆ) \quad a^2 - 2ah - k^2 = 0.$$

4-27. இரு வட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோடுகள்.



படம் 88

கொடுத்துள்ள இரு வட்டங்களின் மையங்கள் C_1, C_2 எனவும், ஆரங்கள் r_1, r_2 எனவும் கொள்வோம்.

AC, BD என்ற கோடுகள் தேர்ப்பொதுத் தொடுகோடுகள் (direct common tangents) எனவும், மற்ற இரு கோடுகள் குறுக்குப் பொதுத் தொடுகோடுகள் (transverse common tangents) எனவும் கூறப்படுகின்றன.

தேர்ப்பொதுத் தொடுகோடுகள் மையங்கள் செங்குத்தும் C_1C_2 என்ற கோட்டை S_1 புள்ளியிலும், குறுக்குப் பொதுத் தொடுகோடுகள் S_2 புள்ளியிலும் வெட்டுகின்றன என்போம். S_1, S_2 முறையே உள்வெட்டுமையம் (internal centre of similitude), வெளி வெட்டுமையம் (external centre of similitude) எனப்படுகின்றன. S_1, S_2 புள்ளிகள் C_1C_2 கோட்டை முறையே உள்ளும் புறமும் ஆரங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன.

4-28. துணை அளவு வினக்கம் (Parametric representation)

ஆதிமைய மையமாதலும், ஆரம் a ஆவதும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$ என நாம் கண்டோம்.

வட்டத்தின் மீதுள்ள P என்ற யாதேதனும் ஒரு புள்ளியை ஆதிமையம் செங்குத்தும் கோடு x ஆயத்தூண் ஏற்படுத்தும் கோணம் θ எனில், P -யின் ஆயத் தொலைகள் ($a \cos \theta, a \sin \theta$) ஆகும். θ -யின் மதிப்புத் தொலைவின் P -யின் நிலையை நாம் ஆரம்பவாய். எனவே, பரிதிவின் மீதுள்ள யாதேதனும் ஒரு புள்ளியைப் புள்ளி θ எனக் கருக்கமாக நாம் குறிப்பிடலாம். இம் மூன்றாம் துணை அளவு வினக்கம் எனப்படும்.

4.29. $x^2 + y^2 = a^2$ கூட்டத்தில் மீதுள்ள θ, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

θ, ϕ புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே $(a \cos \theta, a \sin \theta), (a \cos \phi, a \sin \phi)$ இப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{y - a \sin \theta}{a \sin \theta - a \sin \phi} = \frac{x - a \cos \theta}{a \cos \theta - a \cos \phi}$$

$$(அ - ஆ) \quad y - a \sin \theta$$

$$= \frac{\sin \theta - \sin \phi}{\cos \theta - \cos \phi} (x - a \cos \theta)$$

$$= \frac{2 \cos \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}}{-2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}} (x - a \cos \theta)$$

$$= \frac{\cos \frac{\theta + \phi}{2}}{-\sin \frac{\theta + \phi}{2}} (x - a \cos \theta)$$

$$\therefore -y \sin \frac{\theta + \phi}{2} + a \sin \theta \sin \frac{\theta + \phi}{2}$$

$$= x \cos \frac{\theta + \phi}{2} - a \cos \theta \cos \frac{\theta + \phi}{2}$$

$$(அ - ஆ) \quad x \cos \frac{\theta + \phi}{2} + y \sin \frac{\theta + \phi}{2}$$

$$= a \left[\cos \theta \cos \frac{\theta + \phi}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta + \phi}{2} \right]$$

$$= a \cos \left(\theta - \frac{\theta + \phi}{2} \right)$$

$$= a \cos \frac{\theta - \phi}{2}$$

எனவே, $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் மீதுள்ள θ , ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$x \cos \frac{\theta + \phi}{2} + y \sin \frac{\theta + \phi}{2} = a \cos \frac{\theta - \phi}{2}.$$

இருள் 1 : $x \cos \frac{\theta + \phi}{2} + y \sin \frac{\theta + \phi}{2} = a \cos \frac{\theta - \phi}{2}$. இதில் $\phi = \theta$ எனில், இது புள்ளிகளுள் பொருத்தும் புள்ளிகளாகும். எனவே, θ புள்ளியிலேத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$x \cos \frac{\theta + \theta}{2} + y \sin \frac{\theta + \theta}{2} = a \cos \frac{\theta - \theta}{2}$$

$$(\text{அ.து}) \quad x \cos \theta + y \sin \theta = a.$$

இருள் 2 : $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ எனும் வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு,

$$(x-h) \cos \theta + (y-k) \sin \theta = r \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்து 15 : $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ வட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோடுகளைக் காண்க.

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

(1)-இன் மையம் $C_1(1, 3)$, ஆரம் $r_1 = \sqrt{1+9-9} = 1$.

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

(2)-இன் மையம் $C_2(-3, 1)$, ஆரம் $r_2 = \sqrt{9+1-1} = 3$.

C_1C_2 = மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம்

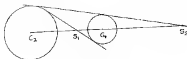
$$\begin{aligned} &= \sqrt{(1+3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$r_1 + r_2 = \text{ஆரங்களின் கூட்டுத்தொகை} = 1 + 3 = 4.$$

$$C_1C_2 > r_1 + r_2$$

எனவே, வட்டங்கள் வெட்டிக்கொள்ளா.

∴ இவ் வட்டங்களுக்குப் பொதுத் தொடுகோடுகள் நான்கு உண்டு.



படம் 89.

C_1, C_3 கோட்டை S_1 உள்ளும் S_3 புறமும் $8 : 1$ விகிதத்தில் இருக்கும்.

$$x = \frac{8(1) + 1(-8)}{8+1} = 0, \quad y = \frac{8(8) + (1)1}{8+1} = \frac{5}{9}$$

$$x = \frac{8(1) - 1(-8)}{8-1} = 8, \quad y = \frac{8(8) - 1(1)}{8-1} = 4.$$

எனவே, S_1, S_3 புள்ளிகளின் ஆபத்தொலைகள் முறையே $\left(0, \frac{5}{9}\right), (8, 4)$

S_1 புள்ளியிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு வட்டத்திற்கு வரைபுத் இரட்டைத் தொடுகோடுகள் குறுக்குப் பொதுத் தொடுகோடுகளாகும்.

அவைகளின் சமன்பாடு $T^2 = SS_1$.

$$\begin{aligned} & \left[x(0) + y\left(\frac{5}{9}\right) - 1(x+0) - 8\left(y + \frac{5}{9}\right) + 8 \right]^2 \\ &= (x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8) \left(0 + \frac{25}{4} - 0 - 16 + 8 \right). \end{aligned}$$

$$(அ - து) \quad (2x + y - 8)^2 = (x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8)$$

$$\text{இதைச் சுருக்கி,} \quad 3x^2 + 4xy - 10x = 0$$

$$(அ - து) \quad x(3x + 4y - 10) = 0.$$

எனவே, குறுக்குப் பொதுத் தொடுகோடுகளின்

$$\text{சமன்பாடுகள்,} \quad x = 0, \quad 3x + 4y - 10 = 0.$$

$S_3(8, 4)$ புள்ளியிலிருந்து வாதேனும் ஒரு கட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள் தேர்ப்பொதுத் தொடுகோடுகளாகும்.

அளவகளின் சமன்பாடு, $T^2 = SS_1$

$$\begin{aligned} (\text{அ} - \text{து}) \quad & [8x + y, 4 - (x + 8) - 8(y + 4) + 8]^2 \\ & = (x^2 + y^2 - 8x - 8y + 8)(9 + 16 - 8 - 84 + 9) \end{aligned}$$

இதைச் சுருக்கிச்,

$$8y^2 - 4xy + 16x - 18y = 0,$$

$$\therefore (y-4)(8y-4x) = 0$$

எனவே, தேர்ப் பொதுத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்
 $y-4 = 0$, $8y-4x = 0$.

மீதிதொகு முறை

கட்டம் (1)-க்குத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு,

$$(x-1)\cos \theta + (y-8)\sin \theta = 1 \quad \dots (1)$$

இக்கோடு கட்டம் (2)-ஐத் தொடுவதற்குரிய கட்டுப்பாடு,

$$(-8-1)\cos \theta + (1-8)\sin \theta = 1 = \pm 8.$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad 8\cos \theta + \sin \theta = 1 \quad (\text{அ} - \text{து}) \quad -8.$$

$$8\cos \theta + \sin \theta = 1$$

$$\therefore 4\cos^2 \theta = (1-\sin \theta)^2$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad 4(1-\sin^2 \theta) = (1-\sin \theta)^2$$

$$\therefore 5\sin^2 \theta - 8\sin \theta - 3 = 0$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad \sin \theta = \frac{8 \pm \sqrt{4 + 90}}{10} = 1 \quad (\text{அ} - \text{து}) \quad -\frac{3}{5}.$$

$$\therefore \cos \theta = 0 \quad (\text{அ} - \text{து}) \quad \frac{4}{5}.$$

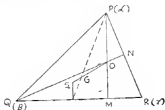
இம் மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (1)-ஐப் பிரதியிடுவது தொடு கோட்டின் சமன்பாடுகள்,

$$y = 4, \quad 8y-4x = 0 \text{ எனக் கிடைக்கும்.}$$

இவ்வாறே $\sin \theta + \sin \theta = -2$ சமன்பாட்டிற்குத் து மீற
இரு தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்,

$$x = 0, 8x + 4y - 10 = 0 \text{ கிடைக்கப் பெறும்.}$$

மாதிரி 16 : $(a \cos \alpha, a \sin \alpha), (a \cos \beta, a \sin \beta), (a \cos \gamma, a \sin \gamma)$ உச்சிகளைக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக் கோட்டுச் சத்தி (orthocentre), $\frac{1}{2}(a \cos \alpha + a \cos \beta + a \cos \gamma), \frac{1}{2}(a \sin \alpha + a \sin \beta + a \sin \gamma)$ என திறவுக. மேலும் சுற்றுவட்ட மையத்தையும் (circumcentre), குத்துக் கோட்டுச் சத்தியையும் கோக்கும் கோட்டை மையக் கோட்டுச் சத்தி (centroid) 1 : 2 விகிதத்தில் பிரிக்கும் என திறவுக.



படம் 40.

$P(a \cos \alpha, a \sin \alpha), Q(a \cos \beta, a \sin \beta), R(a \cos \gamma, a \sin \gamma)$ எனக் கொள்வோம்.

PM, QN முறையே QR, RP கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக வரையவும். இவைகள் வெட்டும் புள்ளி குத்துக்கோட்டுச் சத்தி (O) ஆகும்.

QR -இன் சரிசு,

$$\begin{aligned} &= \frac{a \sin \gamma - a \sin \beta}{a \cos \gamma - a \cos \beta} = \frac{\sin \gamma - \sin \beta}{\cos \gamma - \cos \beta} \\ &= \frac{2 \cos \frac{\gamma + \beta}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2}}{-2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2}} = -\frac{\cos \frac{\gamma + \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma + \beta}{2}} \end{aligned}$$

இவ்வாறே RP -இன் சரிவு,

$$= -\frac{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\beta + \alpha}{2}},$$

எனவே, PM , QN கோடுகளின் சரிவு முறையே,

$$\frac{\sin \frac{\gamma + \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma + \beta}{2}}, \quad \frac{\sin \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}}.$$

$\therefore PM$ -இன் சமன்பாடு,

$$y - a \sin \alpha = \frac{\sin \frac{(\gamma + \beta)}{2}}{\cos \frac{\gamma + \beta}{2}} [x - a \cos \alpha]$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad y \cos \frac{1}{2}(\gamma + \beta) - x \sin \frac{1}{2}(\gamma + \beta) \\ = a [\sin \alpha \cos \frac{1}{2}(\gamma + \beta) - \cos \alpha \sin \frac{1}{2}(\gamma + \beta)] \\ = a \sin \frac{2\alpha - \gamma - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ஆ-து)} \quad x \sin \frac{1}{2}(\gamma + \beta) - y \cos \frac{1}{2}(\gamma + \beta) \\ = a \sin \left[\frac{\beta + \gamma}{2} - \alpha \right] \quad \dots \quad (1) \end{aligned}$$

இவ்வாறே QN -இன் சமன்பாடு,

$$x \sin \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) - y \cos \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) = a \sin \left[\frac{\gamma + \alpha}{2} - \beta \right] \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ஐ விடுவீடுவீடு நுத்துக் கொட்டுதல் சத்தியின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும்.

(1)-ஐ $\cos \frac{(\gamma + \alpha)}{2}$ ஆக பெருக்க,

$$\begin{aligned} & x \sin \frac{1}{2} (\gamma + \beta) \cos \frac{1}{2} (\gamma + \alpha) \\ & - y \cos \frac{1}{2} (\gamma + \beta) \cos \frac{1}{2} (\gamma + \alpha) \\ & = a \sin \left(\frac{\beta + \gamma}{2} - \alpha \right) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) \quad \dots \quad (3) \end{aligned}$$

(2)-ஐ $\cos \frac{1}{2} (\gamma + \beta)$ ஆக பெருக்க,

$$\begin{aligned} & x \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\gamma + \beta) \\ & - y \cos \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\gamma + \beta) \\ & = a \sin \left(\frac{\gamma + \alpha}{2} - \beta \right) \cos \frac{1}{2} (\gamma + \beta) \quad \dots \quad (4) \end{aligned}$$

(3)-ஐ (4)-ஐக் கழிப்பீடுக.

$$\begin{aligned} & x \left[\sin \frac{1}{2} (\gamma + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) \right. \\ & \quad \left. - \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\gamma + \beta) \right] \\ & = a \left[\sin \left(\frac{\beta + \gamma}{2} - \alpha \right) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) \right. \\ & \quad \left. - \sin \left(\frac{\gamma + \alpha}{2} - \beta \right) \cos \frac{1}{2} (\gamma + \beta) \right] \\ \therefore \quad & x \sin \left[\frac{\gamma + \beta}{2} - \frac{\alpha + \gamma}{2} \right] \\ & = a \left\{ \left[\frac{\sin \left(\frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \right) + \sin \left(\frac{\beta - \gamma - \alpha}{2} \right)}{2} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\sin \frac{\gamma + \alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha - \gamma - \beta}{2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha - \beta) &= x \sin \frac{1}{2} (\beta - \alpha) = \frac{a}{2} \left[\sin \frac{1}{2} (\beta + 2\gamma - \alpha) \right. \\
&+ \sin \frac{1}{2} (\beta - 2\alpha) - \sin \frac{1}{2} (2\gamma + \alpha - \beta) + \sin \frac{1}{2} (\alpha - 2\beta) \left. \right] \\
&= \frac{a}{2} \left[\sin \frac{1}{2} (\beta + 2\gamma - \alpha) - \sin \frac{1}{2} (2\gamma + \alpha - \beta) \right. \\
&\quad \left. + \sin \frac{1}{2} (\beta - 2\alpha) + \sin \frac{1}{2} (\alpha - 2\beta) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[a \{ 2 \cos \gamma \sin \frac{\beta - \alpha}{2} + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin (\beta - \alpha) \} \right] \\
&= a \left[\cos \gamma \sin \frac{\beta - \alpha}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \right] \\
&= a \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \left[\cos \gamma + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right] \\
&= a \sin \frac{\beta - \alpha}{2} (\cos \gamma + \cos \beta + \cos \alpha)
\end{aligned}$$

$$\therefore x = a (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$$

$$\text{இவ்வாறே } y = a (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).$$

எனவே, குத்துக் கோட்டுச் சத்தியின் ஆயத் தொலைகள்,

$$O(a \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma), a(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)).$$

PQR முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் (circumcircle) $x^2 + y^2 = a^2$ ஆகும்.

எனவே, அதன் மையம் $S(0, 0)$.

$S(0, 0)$ -த்தைவும், O -த்தைவும் சேக்கும் கோட்டை $1:2$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி,

$$\left(\frac{1 \cdot a (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) + 2 \cdot 0}{1 + 2}, \frac{1 \cdot a (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) + 2 \cdot 0}{1 + 2} \right).$$

$$(அ - ஆ) \left[\frac{a}{8} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) + \frac{a}{8} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \right]$$

இவை மையக் கோட்டுச் சத்தி G -யின் ஆயத் தொலைகாம்.

\therefore சுற்று வட்ட மையத்தைக் குத்துக் கோட்டுச் சத்தியுடன் செங்குத்தாகோட்டை, மையக் கோட்டுச் சத்தி $1:2$ விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

மாநிச் 17: $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத் திற்று வரையும் இரட்டைத் தொடு கோடுகளின் இடைமேயுள்ள கோணம் α எனும் மாநிச் எனில், $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி யாதா?

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடு கோடுகள், $T^2 = SS_1$,

$$(அ - ஆ) (xx_1 + yy_1 - a^2)^2 = (x^2 + y^2 - a^2)(x_1^2 + y_1^2 - a^2).$$

இதில் x^2, y^2, xy என்ற உறுப்புகளின் செழுக்கை முறையே $a^2 - y_1^2, a^2 - x_1^2, 2x_1y_1$ ஆகும்.

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\pm 2\sqrt{(x_1y_1)^2 - (a^2 - y_1^2)(a^2 - x_1^2)}}{(a^2 - y_1^2) + (a^2 - x_1^2)}$$

$$(அ + ஆ) (2a^2 - x_1^2 - y_1^2)\tan^2 \alpha = 4[x_1^2y_1^2 - a^4 + a^2x_1^2 + a^2y_1^2 - x_1^2y_1^2]$$

$$(அ - ஆ) (2a^2 - x_1^2 - y_1^2)\tan^2 \alpha = 4a^2[x_1^2 + y_1^2 - a^2]$$

எனவே, (x_1, y_1) -இன் இயங்கு வழி,

$$(2a^2 - x^2 - y^2)\tan^2 \alpha = 4a^2(x^2 + y^2 - a^2).$$

4.30. துணைய வட்டங்கள் (Conjugate Diameters)

ஒரு வட்டத்தின் இரு விட்டங்களில் ஒன்று மற்றதன் இணை கோடுகளை இரு சமமாகப் பிரிக்கு மென்ற, அவ்விரு விட்டங்களும் குறிப்பிட்ட வட்டத்தைச் சாத்த துணைய வட்டங்கள் எனப்படும்.

$x^2 + y^2 = c^2$ வட்டத்தின் இரு விட்டங்கள் $y = m_1x$, $y = m_2x$ எனக் கொள்வோம். இவை துணையிய விட்டங்க ளெவ்வின் ஒன்று மற்றதை இரு சமமாகப் பிரிக்கும்.

$y = m_1x$ -க்கு இணையாக இருக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொண்டால், அதன் சமன்பாடு,

$$xx_1 + yy_1 = c^2,$$

$$\text{இதன் சரிவு} = \frac{-x_1}{y_1}$$

$$\therefore \frac{-x_1}{y_1} = m_2$$

$$\text{(அ-து)} \quad m_2y_1 + x_1 = 0.$$

$\therefore (x_1, y_1)$ புள்ளியில் இயங்கு வரீ,

$$m_2y + x = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{இதன் சரிவு} = -\frac{1}{m_2}$$

ஆனால் $y = m_1x$ விட்டமும் சமன்பாடு (1) குறிக்கும் கோடும் ஒன்றேயாகும்.

$$\therefore m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$\text{(அ-து)} \quad m_1m_2 = -1.$$

$\therefore y = m_1x$, $y = m_2x$ துணையிய விட்டங்கள்

எனில், $m_1m_2 = -1$.

பயிற்சி 4.2.

1. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளி யிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

2. $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$, $x^2 + y^2 + 2hx + c = 0$ என்ற வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகெனில்,
 $\frac{1}{g^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{1}{c}$ என நிறுவுக.

3. $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$ வட்டங்கள் ஓங்கையொன்று தொடுமென நிறுவித் தொடுபுள்ளியைக் காண்க.

4. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் தரணின் சமன்பாடு $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ எனின், இத் தரணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 = a^2 - 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = 0$$

என நிறுவுக.

5. $x^2 + y^2 + gx + fy + c = 0$, $lx + my + n = 0$ வெட்டும் புள்ளிகளும், $x^2 + y^2 + g'x + f'y + c' = 0$, $l'x + m'y + n' = 0$ வெட்டும் புள்ளிகளும் ஒரே வட்டத்தின்மீது அமைந்திருப்பின்,

$$\begin{vmatrix} g-g' & f-f' & c-c' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

6. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ வட்டத்திற்கு $2x - 4y = 1$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. தொடுபுள்ளி களையும் காண்க.

7. $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ வட்டங்கள் தம்முள் மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளுதலான நிறுவுக. மெய்யான பொதுத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

8. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்திற்கு $lx + my + n = 0$ தொடுகோடாக அணையத் தேவையான கட்டுப்பாடு என்ன?

9. $4x^2 + 4y^2 - 9 = 0$, $9x^2 + 9y^2 - 16 = 0$ வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் நீளம் 3:4 விகிதத்திலிருப்பின், அப் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

10. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$ வட்டத்தைச் சரத்தித் $2x - 3y + 10 = 0$ கோட்டின் இணைய புள்ளி காண்க.

11. ஒரு வட்டம் λ ஆயத்தைத் தொடும். இது y ஆயத்தில் ஏற்படுத்தும் தாணின் நீளம் $2k$ எனில், அம் வட்ட-மையத்தில் இயங்கு வழி $y^2 - x^2 = k^2$ என நிறுவுக.
12. ஒரு வட்டத்திற்கு வரையும் தாண்டை மற்ருரு வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகளெனில், அத் தாணின் முனைகளில் வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் செங்கும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.
13. $y = x - 1$ கோட்டில் $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ வட்டம் ஏற்படுத்தும் தாணின் தடுபு புள்ளி காண்க.
14. $A(2, 2)$, $B(5, 3)$, $C(3, -1)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மீதுள்ள P என்ற வாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைவு $(4 + \sqrt{6} \cos \theta)$, $1 + \sqrt{6} \sin \theta$ என்ற வடிவில் எழுதலாம் என நிறுவு. AP, BC க்குச் செங்குத்துக் கோடுகளில், P -யின் ஆயத் தொலைகள் யாவை?
15. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகளிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c \sin^2 \alpha + (g^2 + f^2) \cos^2 \alpha = 0$ வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் 2α என நிறுவுக.
16. $x^2 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ என்ற வட்டங் களுக்கு வரையப்படும் பொதுத் தொடுகோடுகளின் மையங்குகளைக் காண்க.
17. P என்ற புள்ளியின் ஒரு வட்டத்தைச் சாத்தி இரைக் கோடு மற்ருரு வட்டத்தின் தொடுகோடுகளில், P -யின் இயங்கு வழிக் காண்க.
18. $x^2 + y^2 = c^2$ வட்டத்தைச் சாத்தி $(x + \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = k^2$ என்ற வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் இரைக்கோடு $(ax + by + c)^2 = k^2(x^2 + y^2)$ வரையவரையைத் தொடும் என நிறுவுக.
19. $x^2 + y^2 = 100$ வட்டத்தைச் சாத்தி $(-9, 12)$ புள்ளியின் இரைக்கோடு அவ்வட்டத்தை வெட்டும் என நிறுவுக. இரைக்கோடு வட்டத்தில் ஏற்படுத்தும் தாணின் நீளம் காண்க.

வட்டம்

20. ஒரு வட்டம் $(-1, 1)$, $(0, 8)$, $(5, 5)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது. ஆதிமைய வட்ட மையத்துடன் சேர்க்கும் கோடுகளிலிணையாக ஆய் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடு புள்ளிகளாகக் காண்க.
21. $6x^2 + 8y^2 + 24x - 8y + 15 = 0$ வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க. ஆதிமையிடுத்து மிகத் தொலைவில் உள்ள வட்டப் புள்ளியைக் காண்க. $2x - y + 8 = 0$ வட்டத்தில் ஏற்படுத்தும் தாளின் நீளம் என்ன?
22. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு P -விலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடுநகண் வட்ட மையத்தில் தாளும் கோணம் 90° எனின், P -யின் இயங்கு வழிக் காண்க.
23. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்திற்கு ஆதிமையிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகள் $(gx+fy)^2 = c(x^2+y^2)$ என திறவுக. ஆத் தொடுகோடுகள் தம்மூன் செங்குத் தெனில் வட்ட மையத்தின் இயங்கு வழி என்ன?
24. $x^2 + y^2 - 14x + 25 = 0$ வட்டத்திற்கு ஆதிமையிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகள் தம்மூன் செங்குத் தாளமை என திறவுக.
25. (p, q) புள்ளி வழிச் செல்லும் $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் தாள்கள்தம் நடுப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி,
 $(x^2 + y^2) = (px + qy)$ என திறவுக.

விடைகள்

1. $(x'-a)^2 + (y'-b)^2 = c^2$; 8. $\left(-\frac{17}{8}, \frac{11}{5}\right)$.
 9. $8x-4y+10=0$; $3x-4y=0$; $\left(\frac{8}{5}, \frac{14}{5}\right)$; 14. $(8, 0)$.
 16. $y-1=0$; $x+1=0$; $3x+4y-5=0$; $4x-3y-5=0$.
 17. $x^2 + y^2 = a^2$, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = b^2$ வட்டங்களினால்,
 $b^2(x^2 + y^2) = (hx + ky - a^2)^2$. 19. $\frac{20\sqrt{5}}{3}$, 20. $(5, 1)$,
 $(-1, 5)$. 21. $\left(-\frac{8}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right)$; $\sqrt{\frac{17}{10}}$.
 22. $x^2 + y^2 = 2a^2$.
 23. வி. 2

5. ஒருநிலை வட்டங்கள் (System of Circles)

5.1. இருவரை வரைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம்

இரு வரை வரைகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் அவ்வவன் வெட்டும் புள்ளியில் அவைகளுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணமாகும். இக் கோணம் 90° எனில் அம் வரைவரைகள் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்கின்றன எனப் படுகிறது.

இரு வட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 90° எனில் அவை செங்குத்து வட்டங்கள் (orthogonal circles) எனப்படும்.

5.2. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ வட்டங்கள் செங்குத்து வட்டங்களாக அமைவத் தேவையான கட்டுப்பாடு.



படம் 41.

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

எனக்கொள்வோம்.

இவைகள் P புள்ளியில் வெட்டுகின்றன எனவும், வடிவங்கள் c_1, c_2 எனவும் கொள்வோம்.

எனவே, c_1, c_2 -யின் ஆயத்தொலைகள் $(-g_1, -f_1), (-g_2, -f_2)$ வட்டங்கள் (1), (2)-இன் ஆரங்கள் மூன்றையே,

$$\sqrt{g_1^2 + f_1^2} = c_1, \sqrt{g_2^2 + f_2^2} = c_2.$$

இரு வட்டங்கள் செங்குத்து வட்டங்களாதலின் P புள்ளி விடத்து அவைகளுக்கு வரையறு தொடுகோடுகள் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தானவை. எனவே, இத் தொடுகோடுகளுக்குச் செங்குத்தான C_1P, C_2P என்ற ஆரங்கள் தம்மால் செங்குத்தானவையாகும்.

$\therefore C_1C_2P$ ஒரு செங்கோண மூக்கோணம்.

$$\text{எனவே, } C_1C_2^2 = C_1P^2 + C_2P^2$$

$$\text{(அ-து) } (-g_1 + g_2)^2 + (-f_1 + f_2)^2 = (g_1^2 + f_1^2 - c_1^2) + (g_2^2 + f_2^2 - c_2^2)$$

$$\text{(அ-து) } 2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1^2 + c_2^2.$$

எனவே, இரு வட்டங்கள் செங்குத்து வட்டங்களாக அமைவதே அவையான கட்டுப்பாடு,

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1^2 + c_2^2.$$

$$\begin{aligned} \text{மாதிரி 1 : } x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 &= 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 8 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் மையப்பாட்டைக் காண்க.

$$x_2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 8 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

இம் மூன்று வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டம்,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (4)$$

எனக் கொள்வோம்.

எனவே, பத்தி 6-இன்படி,

$$2g(1) + 2f(2) = c + 1$$

$$2g\left(\frac{3}{2}\right) + 2f(2) = c - \frac{3}{2}$$

$$2g(-1) + 2f(2) = c - 3$$

$$(அ - ஆ) \quad 2g + 4f - c = 1$$

$$2g + 8f - 2c = -3$$

$$2g - 4f + c = 3$$

$$\text{இவைகளை விடுவிப்பின் } g = -\frac{5}{2}, \quad f = -7, \quad c = -34.$$

$$\text{எனவே, தேவையான வட்டம் } x^2 + y^2 - 5x - 14y - 34 = 0.$$

மாதிரி 2 : $y = mx + b$ கோட்டைத் தொடுகோடாகக் கொண்ட இரு வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றும் $(0, k)$, $(0, -k)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்கின்றன. இவை செங்குத்து வட்டங்களானால் $k^2(2+m^2) = b^2$ என நிறுவுக.

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

வட்டம் $(0, k)$, $(0, -k)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது எனின்,

$$0 + k^2 + 0 + 2fk + c = 0 \quad (\text{அ-ஆ}) \quad k^2 + 2kf + c = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$0 + k^2 + 0 - 2fk + c = 0 \quad (\text{அ-ஆ}) \quad k^2 - 2kf + c = 0 \quad \dots \quad (3)$$

(2)-லிருந்து (3)-ஐக் கழிப்பின், $4kf = 0$

$$\therefore f = 0, \quad c = -k^2 \quad \dots \quad (4)$$

மேலும் $y = mx + b$ வட்டம் (1)-க்குத் தொடு கோட்டெனில், வட்டம் (1)-இன் மையத்திலிருந்து $(-g, -f)$, $y - mx - b = 0$ கோட்டிற்கு வரையடி செங்குத்துக் கோடு வட்ட ஆரத்திற்குச் சமமாகும்.

$$\therefore \frac{-f - m(-g) - b}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$(\text{அ - ஆ}) \quad (b + f - mg)m^2 = (1 + m^2)(g^2 + f^2 - c)$$

$$\therefore (b + f)^2 + m^2g^2 - 2(b + f)mg \\ = g^2 + f^2 - c + m^2g^2 + m^2f^2 - m^2c$$

$$(அ - ஆ) \quad g^2 + 2m(b+f)g - (b+f)^2 + (f^2 - c)(1+m^2) = 0.$$

இது g -இல் இருபடிச் சமன்பாடாகியதால் g -க்கு இரு மதிப்புகள் உண்டு. அவை g_1, g_2 எனில், கொடுத்துள்ள கட்டுப்பாட்டில் இரு வட்டங்கள் உள்ளன.

$$\therefore g_1 g_2 = (f^2 - c)(1 + m^2) - (b + f)^2$$

$$(4)-இன்படி $f = 0, c = -k^2$$$

$$\therefore g_1 g_2 = k^2(1 + m^2) - b^2.$$

இவ்விரு வட்டங்களும் செங்குத்து வட்டங்களாதலால்,

$$2g_1 g_2 + 2f_1 f_2 = c_1 + c_2$$

$$\therefore 2 \{k^2(1 + m^2) - b^2\} = -2k^2$$

$$[\because f_1 = 0 = f_2; c_1 = -k^2 = c^2]$$

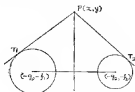
$$(அ - ஆ) \quad 4k^2 + 2k^2 m^2 = 2b^2$$

$$\therefore k^2(2 + m^2) = b^2.$$

3.3. சமத் தொடு அச்ச (Radical Axis) வரைபடி

ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தளங்கள் சமமெனில், அப் புள்ளியின் இயங்கு வழி அப் புள்ளி வட்டங்களின் சமத் தொடு அச்ச எனப்படும்.

3.4. சமத் தொடு அச்சின் சமன்பாடு



படம் 48.

வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்,

$$S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \dots (1)$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \quad \dots (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

சமத் தொடு அச்சின் மீது $P(x_1, y_1)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனவும், PT_1, PT_2 மூத்தையே வட்டங்கள் (1), (2)-க்கு வரையப் பட்டுத் தொடு கோடுகளின் தீள்களை எனவும் கொள்வோம்.

வரையறையின் படி, $PT_1 = PT_2$

$$(அ - து) \quad PT_1^2 = PT_2^2$$

$$\begin{aligned} \therefore x_1^2 + y_1^2 + 2g_1x_1 + 2f_1y_1 + c_1 \\ = x_1^2 + y_1^2 + 2g_2x_1 + 2f_2y_1 + c_2 \end{aligned}$$

$$\therefore 2x_1(g_1 - g_2) + 2y_1(f_1 - f_2) + (c_1 - c_2) = 0 \quad \dots (3)$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ -இன் இயங்கு வழி,

$$2x(g_1 - g_2) + 2y(f_1 - f_2) + (c_1 - c_2) = 0.$$

இஃது ஒருபடிச் சமன்பாடாதலின் சமத் தொடு அச்ச ஒரு நேரக் கோடாகும்.

$$\text{மேலும் } S_1 - S_2 = 2x(g_1 - g_2) + 2y(f_1 - f_2) + c_1 - c_2$$

எனவே, சமத் தொடு அச்சின் சமன்பாடு,

$$S_1 - S_2 = 0 \text{ என்றும் குறிப்பிடலாம்.}$$

தீ.தீ. 1. வட்டங்களின் மையங்கள் $(-g_1, -f_1), (-g_2, -f_2)$.

எனவே, வட்டங்களின் மையப்பீணைக் கோடு (line of centres) சரிவு,

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2}$$

சமத் தொடு அச்சின் சரிவு,

$$= \frac{g_1 - g_2}{f_1 - f_2}.$$

எனவே, சரிவுகளின் பெருக்கூற்ற்தொகை -1 ஆகும்.

3. சமத் தொடு ஆச்சு, வட்டங்களின் மையப்பிணைக் கோட்டுக்குச் செங்குத்தாய்வுள்ளது.

2. சமத் தொடு ஆச்சின் சமன்பாடு $S_1 - S_2 = 0$. எனவே, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ சமன்பாடுகளுடன் பொருத்தும் புள்ளிகள் $S_1 - S_2 = 0$ சமன்பாட்டுடனும் பொருத்தும். ஆகவே $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களின் பொதுப் புள்ளிகளின் வழி அங் வட்டங்களின் சமத் தொடு ஆச்சு $S_1 - S_2 = 0$ செல்லும்.

எனவே, இது வட்டங்களும் மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டும் பொது சமத்தொடு ஆச்சு அங் வட்டங்களின் பொது தாண் ஆகும். அங் வட்டங்கள் தம்முள் தொடுமெனில், சமத்தொடு ஆச்சு அங் வட்டங்களின் தொடு புள்ளியிலுந்துத் தொடு கோடாகும். அவ்விரு வட்டங்களும் தம்முள் மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டாவிடில், கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன எனக் கூறுகிறோம். அவைகள் கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டினாலும் சமத்தொடு ஆச்சு மெய்யானதே.

3. சமத்தொடு ஆச்சின் வரையறையின்படி, அப்போது இது வட்டங்களும் வரையப்படும் பொதுத் தொடு கோடுகளே இது சமக் கூறிடும்.

4. $S_1 = 0$ வட்டம், $S_2 = 0$ வட்டத்தின் பரிதியை இது சமவகைப் பிரித்தால் அவைகளின் சமத்தொடு ஆச்சு $S_2 = 0$ வட்டத்தின் மையம் வழிச் செல்லும்.

5.6. சமத்தொடு வரை மையம் (Radical Centre)

வரையறை : மூன்று வட்டங்களை இரண்டையொருவருத்துக் கொண்டால், அவைகளின் சமத்தொடு ஆச்சுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும். அப் புள்ளி சமத்தொடு வரைமையம் எனப்படும்.

வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்,

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ எனக் கொள்ளோம்.

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு ஆச்சு,

$$S_1 - S_2 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$S_2 = 0$, $S_3 = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு ஆச்சு,

$$S_2 - S_3 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1)-ஐவும் (2)-ஐவும் கூட்டினால்,

$$S_1 - S_2 = 0 \text{ ஆகும்.} \quad \dots \quad (3)$$

(அ - து) சமத்தொடு அச்சக்கள் (1), (2) வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு (3) ஆகும்.

ஆனால் சமன்பாடு (3), $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களின் சமத் தொடு அச்சாகும்.

எனவே, சமத்தொடு அச்சக்கள் மூன்றும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும்.

5.7. $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்கள் தம்மூன் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $S_1 + \lambda S_2 = 0$, $(\lambda \neq -1)$

$$S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0,$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore S_1 + \lambda S_2 = x^2(1+\lambda) + y^2(1+\lambda) + 2x(g_1 + \lambda g_2) + 2y(f_1 + \lambda f_2) + (c_1 + \lambda c_2) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(அ - து)} \quad x^2 + y^2 + \frac{2(g_1 + \lambda g_2)}{1 + \lambda}x + \frac{2(f_1 + \lambda f_2)}{1 + \lambda}y \\ + \frac{c_1 + \lambda c_2}{1 + \lambda} = 0. \end{aligned}$$

இச் சமன்பாட்டில்,

$$x^2\text{-இன் கெழு} = y^2\text{-இன் கெழு}$$

$$xy\text{-இன் கெழு} = 0$$

எனவே, $S_1 + \lambda S_2 = 0$ சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

மேலும் $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களில் பொருத்தும் புள்ளிகள் $S_1 + \lambda S_2 = 0$ வட்டத்திலும் பொருத்தும். $\therefore S_1 + \lambda S_2 = 0$ வட்டம் $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்கள் தம்மூன் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும், கூடுதலாகக் கொடுக்கப்படும் கட்டுப்பாட்டி. கருத்து λ -வின் மதிப்பை அறியலாம்.

$\lambda = -1$ எனில், $S_1 + S_2 = 0$ வட்டம் $S_1 - S_2 = 0$ எனும் சமத்தொடு ஆகலாம்.

குறிப்பு : வட்டங்களின் சமன்பாடுகளில் x^2, y^2 மூலப்படி கலிசு கெடுக்கல் ஒப்பொன்றும் ஒன்றுக்குச் சமமாக இருக்குமாறு சமன்பாடுகளை முதலில் மாற்றி எழுத வேண்டும்.

5-8. $S=0$ வட்டமும், $L=0$ கோடும் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $S + \lambda L = 0$.

$$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$L = lx + my + n = 0 \text{ எனில்,}$$

$$S + \lambda L = x^2 + y^2 + (2g + \lambda l)x + (2f + \lambda m)y + (c + \lambda n) = 0$$

இதில், x^2 -இன் கெடு = y^2 -இன் கெடு

$$x, y \text{-இன் கெடு} = 0$$

எனவே, இச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

மேலும் $S = 0$, $L = 0$ என்ற வளைவரையில் பொருத்தும் புள்ளிகள் $S + \lambda L = 0$ வட்டத்திலும் பொருத்தும்.

எனவே, $S = 0$ வட்டமும், $L = 0$ கோடும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் வழி $S + \lambda L = 0$ வட்டம் செல்லும்.

5-9. ஒரு வட்டம் வேறு இரு வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டுமேனில் அங் வட்டத்தின் மையம் அந்த இரு வட்டங்களின் சமத்தொடு ஆக்கின் மீதமையும்.

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

வட்டம்,

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றது எனக்கொள்வோம்.

$$\therefore 2g_1 + 2f_1 = c + c_1 \quad \dots \quad (4)$$

$$2g_2 + 2f_2 = c + c_2 \quad \dots \quad (5)$$

(4)-இலிருந்து (5)-ஐக் கழிக்க,

$$2g(g_1 - g_2) + 2f(f_1 - f_2) = c_1 - c_2$$

$$(அ - ஆ) \quad 2(-g)(g_1 - g_2) + 2(-f)(f_1 - f_2) + (c_1 - c_2) = 0$$

எனவே, (1)-இன் மையம் $(-g, -f)$.

$$2x(g_1 - g_2) + 2y(f_1 - f_2) + (c_1 - c_2) = 0 \quad \dots (8)$$

செட்டின்மீது அமைவும்.

சமன்பாடு (6), வட்டங்கள் (2), (3)-இன் சமத்தொடு ஆக்க ஆதாரிக், வட்டம் (1)-இன் மையம் வட்டங்கள் (2), (3)-இன் சமத்தொடு ஆச்சின்மீது அமைவார்.

எடுத்து 3: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 7 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 5 = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு ஆக்கக் காண்க. ஆது மையம் பிணைக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயுள்ளது என நிறுவுக.

$$S_1 = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 7 = 0 \quad \dots (1)$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + 6x + 8y - 5 = 0 \quad \dots (2)$$

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு ஆக்க.

$$S_1 - S_2 = 0.$$

$$(அ - ஆ) \quad 8x + 2y - 2 = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad 4x + y - 1 = 0.$$

$S_1 = 0$ வட்டத்தின் மையம் $(-1, -2)$.

$S_2 = 0$ வட்டத்தின் மையம் $(3, -1)$.

$$\therefore \text{மையப்பிணைக்கோட்டின் சரிவு. } \frac{-2+1}{-1-3} = \frac{1}{4}.$$

சமத்தொடு ஆக்க $4x + y - 1 = 0$ -த்தின் சரிவு $= -4$.

$$\text{சரிவுகளின் பெருக்குத் தொகை } \left(\frac{1}{4}\right)(-4) = -1.$$

எனவே, மையம் பிணைக்கோடும் சமத்தொடு ஆக்கம் தம்முள் செங்குத்தாய் வெட்டுவர்.

மாதிரி 4 : $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$
வட்டங்களின் பரிதிவைய இரு சமமாகப் பிரிக்கும் வட்டத்தின்
மையத்தின் இயங்கு வழிக் காண்க.

$$\text{வட்டம் } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (1)$$

எனக் கொள்ளோம்.

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0 \quad \dots (3)$$

வட்டம் (1) வட்டம் (2)-இன் பரிதியை இரு சமமாகப் பிரிக்கும்.

எனவே, அமைவுகளின் சமத்தொகு அச்ச வட்டம் (2)-இன்
மையம் (0, 0) வழிச் செல்லும்.

வட்டம் (1), வட்டம் (2)-இன் சமத்தொகு அச்ச,

$$(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) - (x^2 + y^2 - 4) = 0$$

$$(அ - து) \quad 2gx + 2fy + c + 4 = 0$$

இது (0, 0) வழிச் செல்வதால் $c = -4$.

மேலும், வட்டம் (1) வட்டம் (3)-இன் பரிதியை இரு
சமமாகப் பிரிக்கிறது. எனவே, அமைவுகளின் சமத்தொகு அச்ச,
வட்டம் (3)-இன் மையம் (1, -3) வழிச் செல்லும்.

வட்டங்கள் (1), (3)-இன் சமத்தொகு அச்ச,

$$(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) - (x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1) = 0$$

$$(அ - து) \quad 2(g+1)x + 2(f-3)y + (c-1) = 0$$

இது (1, -3) வழிச் செல்வதால்,

$$2(g+1) + 2(f-3)(-3) + c-1 = 0$$

$$(அ - து) \quad 2g - 6f + 15 = 0 \quad (\because c = -4)$$

$$(அ - து) \quad -2(-g) + 6(-f) + 15 = 0$$

எனவே, வட்டம் (1)-இன் மையத்தின் $(-g, -f)$ இயங்கு வழி
 $-2x + 6y + 15 = 0$

$$(அ-து) \quad 2x - 6y - 15 = 0.$$

மாதிரி 5 : $S_1=0, S_2=0$ வட்டங்களின் ஆரங்கள் முறையே a_1, a_2 எனில், $\frac{S_1}{a_1} \pm \frac{S_2}{a_2} = 0$ வட்டங்கள் செங்குத்து வட்டங்கள் என திருவுக.

$S_1 = 0, S_2 = 0$ வட்டங்களின் மையங்கள் முறையே $(-c, 0), (c, 0)$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore S_1 \equiv (x+c)^2 + y^2 - a_1^2 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$S_2 \equiv (x-c)^2 + y^2 - a_2^2 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$\frac{S_1}{a_1} + \frac{S_2}{a_2} = 0, \quad \frac{S_1}{a_1} - \frac{S_2}{a_2} = 0$$

வட்டங்களைச் செங்குத்து, $S_1 a_2 + S_2 a_1 = 0, S_1 a_2 - S_2 a_1 = 0$ ஆகும்.

$$S_1 a_2 + S_2 a_1 \equiv (x^2 + y^2 + 2cx + c^2 - a_1^2)a_2 \\ + (x^2 + y^2 - 2cx + c^2 - a_2^2)a_1 = 0.$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad x^2(a_2 + a_1) + y^2(a_1 + a_2) + 2x(ca_2 - ca_1) \\ + c^2(a_1 + a_2) - a_1 a_2(a_1 + a_2) = 0.$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad (x^2 + y^2)(a_1 + a_2) + 2cx(a_2 - a_1) \\ + (c^2 - a_2^2)(a_1 + a_2) = 0.$$

$$(\text{அ} + \text{து}) \quad x^2 + y^2 + 2c \frac{(a_2 - a_1)}{a_1 + a_2} x + c^2 - ca_2 = 0.$$

$$\therefore S_1 a_2 + S_2 a_1 \equiv x^2 + y^2 + \frac{2c(a_2 - a_1)}{a_1 + a_2} x \\ + (c^2 - ca_2) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$\text{இவ்வாறே, } S_2 a_2 - S_1 a_1 \equiv x^2 + y^2 + \frac{2c(a_2 + a_1)}{a_2 - a_1} x \\ + (c^2 + ca_2) = 0 \quad \dots \quad (4)$$

வட்டங்கள் (3), (4) செங்குத்து வட்டங்களாகவெனில்,

$$\frac{2c(a_2 - a_1)}{a_2 + a_1} \cdot \frac{c(a_2 + a_1)}{a_2 - a_1} = c^2 - ca_1 + c^2 + ca_2$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad 2c^2 = 2c^2$$

இது மெய்யாகவே வட்டங்கள்,

$$\frac{S_1}{a_1} \text{ and } \frac{S_2}{a_2} = 0$$

சொல்லுதல் வட்டங்களாகும்.

மாதிரி 6 : $x^2 + y^2 + gx + fy + c = 0$, $lx + my + n = 0$ வெட்டும் புள்ளிகள் இரண்டும் $x^2 + y^2 + g_1x + f_1y + c_1 = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ வெட்டும் புள்ளிகள் இரண்டும் ஒரே வட்டத்தின் மீதமையுமெனின்,

$$\begin{vmatrix} g-g_1 & f-f_1 & c-c_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

$$S \equiv x^2 + y^2 + gx + fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$L \equiv lx + my + n = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + g_1x + f_1y + c_1 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$L_1 \equiv l_1x + m_1y + n_1 = 0 \quad \dots \quad (4)$$

(1), (2) வெட்டும் புள்ளிகள் (3), (4) வெட்டும் புள்ளிகள் அமைந்துள்ள வட்டம் $S_2 = 0$... (5)

எனக் கொள்வோம்.

$S = 0$, $S_1 = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொகு அச்சு, $S-S_1=0$

$$(அ-ஆ) \quad 2x\left[\frac{g}{2} - \frac{g_1}{2}\right] + 2y\left[\frac{f}{2} - \frac{f_1}{2}\right] + c-c_1=0$$

$$(அ-ஆ) \quad x(g-g_1) + y(f-f_1) + (c-c_1) = 0 \quad \dots \quad (6)$$

$S=0$, $S_2=0$ வெட்டும் புள்ளிகள் $lx+my+n=0$ கோட்டின் மீதமையும். எனவே அவைகளின் சமத்தொகு அச்சு,

$$lx + my + n = 0 \quad \dots \quad (2)$$

ஆகும்.

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$ என்ற வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி $l_1x+m_1y+n_1=0$ கோட்டின் மீதமையும், எனவே, அவைகளின் சமத்தொகு அச்சு $l_1x + m_1y + n_1 = 0$... (4)

∴ சமத்தொகு அச்சங்கள் (2), (4), (6) மூன்றும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும்.

இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y -ஐ நீக்கின்,

$$\begin{vmatrix} 8-8_1 & f-f_1 & c-c_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

மாதிரி 7: $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$ வட்டங்கள் சமத்தொகு அச்சக் கால்க. அவைகளின் பொது தரணின் நீளம் காண்க.

சமத்தொகு அச்ச,

$$(x^2 + y^2 + 2x + 8y - 7) - (x^2 + y^2 - 2x - y + 1) = 0$$

$$(அ - ஐ) \quad 4x + 4y - 8 = 0$$

$$(அ - ஐ) \quad x + y - 2 = 0.$$

இரு வட்டங்களும் வெட்டும் புள்ளிகள் (x_1, y_1) , (x_2, y_2) எனில்,

$$\text{தரணின் நீளம்} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

சமத்தொகு அச்ச பொது தரண ஆதலின்,

$$x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0, \quad x + y - 2 = 0$$

சமன்பாடுகளிலிருந்து வெட்டும் புள்ளிகளைக் காணலாம்.

$$x + y - 2 = 0 \text{ இலிருந்து } x = 2 - y.$$

இதை $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$ இல் பிரதிநிதி.

$$(2-y)^2 + y^2 - 2(2-y) - y + 1 = 0$$

$$(அ - ஐ) \quad 2(y^2 - 3y + 1) = 0$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{3}{2}, \quad y_1 y_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{எனவே, } (y_1 - y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= \{(2 - y_1) - (2 - y_2)\}^2 = + (y_1 - y_2)^2 \\ &= + \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\therefore \text{நான்கின் நீளம்} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

மீதிதொகு முறை

சமத்தொகு அங்க $x + y - 2 = 0$. இத்தக் கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டம்.

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 + \lambda(x + y - 2) = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad x^2 + y^2 + (2 + \lambda)x + (2 + \lambda)y - 7 - 2\lambda = 0.$$

$$\text{இதன் மையம்} \left(-\frac{\lambda + 2}{2}, -\frac{\lambda + 2}{2} \right)$$

இப்புள்ளி $x + y - 2 = 0$ -இல் இருப்பின் இவ்வட்டத்தின் விட்டம் இவ்வட்டங்களின் மைய நேரணாகும்.

$$-\frac{\lambda + 2}{2} - \frac{\lambda + 2}{2} - 2 = 0$$

$$\therefore \lambda = -\frac{8}{2}$$

\therefore வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 - \frac{8}{2}(x + y - 2) = 0.$$

$$(அ - ஆ) \quad 2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 4 = 0$$

$$\text{இவ்வட்டத்தின் விட்டம்} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

பயிற்சி 5.1.

1. $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$ வட்டங்கள் தம்மால் தொட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

2. $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 + 7x - 8y + 22 = 0$ வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

3. $x^2 + y^2 - 8y + 13 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ வட்டங்களின் செங்குத்தாக வெட்டும் ஒரு வட்டம் ஆதிவழிச் செங்குமெனில் அதன் சமன்பாடு காண்க.
4. $x + y = 4$ கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டம் ஆதிவழிச் செல்கிறது. இவ்வட்டம் $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ வட்டத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டுமெனில், அதன் சமன்பாடு காண்க.
5. $x^2 + y^2 + 4x + 7 = 0$, $2x^2 + 2y^2 + 8x + 6y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 + y = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொகு வரை மையக் காண்க.
6. கொடுத்திருள் இரூ வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
7. $y = 7$ கோட்டின் மீது மையமூடைய வட்டங்கள் $(3, 0)$ புள்ளி வழிச் செல்வின் அவ்வட்டங்களின் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் என்ன?
8. $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ வட்டங்களின் பொது தாண விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
9. $x^2 + y^2 + 2k_1x + c = 0$, $x^2 + y^2 + 2k_2x - c = 0$ வட்டங்களின் பொது தாணின் தீர்வு.

$$2 \sqrt{\frac{(k_1^2 - c)(k_2^2 + c)}{k_1^2 + k_2^2}} \text{ என திருவுக.}$$

10. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$, $(x-b)^2 + (y-a)^2 = c^2$ வட்டங்களின் பொது தாணின் தீர்த்தையும் அதன் சமன்பாட்டையும் காண்க.
11. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் தாண் $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ எனில், அந் தாண் விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$$x^2 + y^2 - a^2 - 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = 0$$

என திருவுக.

$$12. \quad x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0$$

வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டங்களின் பொதுச் சமன்பாடு,

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என நிறுவுக.

$$13. \quad x^2 + y^2 + 2x + 8y + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 + 4x + 8y + 2 = 0 \text{ வட்டங்களின் பொது தூணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.}$$

$$14. \quad S=0 \text{ என்ற வட்டத்தைச் சாத்த துணைவிடப் புள்ளிகள் } A, B \text{ எனில், } AB\text{-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.}$$

$$15. \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \text{ வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளியைச் சென்றும் ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் } 2\sqrt{2} \text{ எனில், அவ் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.}$$

$$16. \quad l_1x + m_1y + n_1 = 0, \quad l_2x + m_2y + n_2 = 0 \text{ கோடுகள் } x^2 + y^2 = r^2 \text{ வட்டத்தைச் சாத்த துணைவிடக் கொடுக என்றால் } (l_1l_2 + m_1m_2)r^2 = n_1n_2 \text{ என நிறுவுக.}$$

$$17. \quad y - 2x = 0, \quad y - 3x = 0, \quad y - 5x = 4 \text{ என்ற கோடுகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் காண்க.}$$

$$18. \quad 5x+y=10, \quad x-y=11, \quad 2x-3y=81 \text{ கோடுகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் காண்க.}$$

$$19. \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0 \text{ வட்டங்களுக்கு } P \text{ புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடு கோடுகளின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் } PA^2 - PB^2, \quad P \text{ புள்ளியிலிருந்து அவ் வட்டங்களின் சமத் தொடு அச்சிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடு } PL.$$

வட்டங்களின் மையம் பிணைக்கோட்டின் நீளம் MN எனில், $PA^2 - PB^2 = 2.PL.MN$ என நிறுவுக.

20. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 7 = 0$ வட்டத்தைச் சேர்ந்த $2x + y - 25 = 0$ கோட்டின் இடைப் புள்ளி காண்க.

விடைகள்

1. $\left(-\frac{17}{8}, \frac{11}{8}\right)$. 2. $x^2 + y^2 - 16x - 18y - 4 = 0$.
 3. $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$. 4. $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$.
 5. $(-2, -1)$. 7. $x^2 + y^2 - 14y - 9 + 2x(x-8) = 0$.
 8. $5x^2 + 5y^2 - 8x - 16y + 12 = 0$. 10. $\frac{2hk}{\sqrt{h^2 + k^2}}$,
 $kx - ky = 0$. 13. $3x^2 + 3y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$. 15. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 12 = 0$. $5x^2 + 5y^2 + 4x + 8y - 88 = 0$.
 17. $8x^2 + 8y^2 - 60x + 40y = 0$. 18. $x^2 + y^2 - 14x - 6y - 111 = 0$. 20. $(3, -1)$.

5-10. பொது அச்ச வட்டங்கள் - ஊராயறை

ஒருதலை வட்டங்களின் (system of circles) ஒவ்வொரு இரட்டை வட்டங்களும் (every pair of circles) ஒரே கோட்டைச் சமத்தொடு அச்சாகக் கொண்டிருப்பின், அவைகள் பொது அச்ச வட்டங்கள் (coaxial circles) எனப்படும்.

பொது அச்ச வட்டங்களைச் சேர்ந்த இரு வட்டங்கள் $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ எனக்கொள்வோம். இவ்வட்டங்கள் A, B புள்ளிகளில் மெய்யாகவோ, கற்பனையாகவோ தம்முள் வெட்டினால், A, B புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோடு அவ்வட்டங்களின் பொது தாண் அல்லது சமத்தொடு அச்ச ஆகும். கவரையறையின்படி எல்லா வட்டங்களிலும் சமத்தொடு அச்ச ஒன்றே யாதலின், எல்லா வட்டங்களும் A, B என்ற நிலைத்த புள்ளிகள் வழிச் செல்லும். சமத்தொடு அச்ச AB , மையப்பிணைக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானிருக்காததால் எல்லா வட்டங்களின் மையங்களும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைவும்.

5-11. பொது அச்ச வட்டங்களின் எல்லா சமன்பாடு

பொது அச்ச வட்டங்களின் மையங்கள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைவாதலின், மையம் பிணைக்கோட்டை x ஆகக் கவும்.

அக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவுள்ள பொதுச் சமத்தொடு அச்சை y ஆயமாகவும் கொள்வோம்.

பொது அச்ச வட்டங்களின் சேர்த்த இடு வட்டங்கள்,

$$S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$$

எனக் கொள்வோம்.

வழியப் பிணைக்கொடு x ஆயமாகவின், வளைவங்களின் y ஆயத் தொலைகள் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore f_1 = 0, f_2 = 0.$$

எனவே, அங்விரு வட்டங்களின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + c_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + c_2 = 0 \quad \text{என ஆகும்.}$$

அவைகளின் சமத்தொடு அச்ச

$$(x^2 + y^2 + 2g_1x + c_1) - (x^2 + y^2 + 2g_2x + c_2) = 0$$

$$(\text{அ - து}) \quad 2x(g_1 - g_2) + (c_1 - c_2) = 0.$$

சமத்தொடு அச்ச y ஆயமாகவின், $x=0$

$$\therefore c_1 - c_2 = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad c_1 = c_2 = c \text{ என்க.}$$

எனவே, அங்விரு வட்டங்களின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + c = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + c = 0 \quad \text{என்குறும்.}$$

(அ - து) பொது அச்ச வட்டங்களின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$$

இச்சமன்பாட்டில் c மாறிலி. ஆனால் g வட்டத்திற்கு வட்டம் மாறக்கூடிய துணை அளவு. g -வின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு அக்கருவைச் சேர்த்த பல்வேறு வட்டங்கள் கிடைக்கப்பெறும்.

5-12. வட்டங்கள் தம்முள் வெட்டுத் புள்ளிகள்

$$x^2 + y^2 + 2gx + c = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்பது பொது அச்ச வட்டங்களின் சமன்பாடாகும்.

இவ்வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்ச y ஆயமாகும். இவைகளில் இரு வட்டங்கள்

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + c = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + c = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

எனக் கொள்வோம்.

இவைகள் y ஆயத்தின் மீது (சமத்தொடு அச்ச) நிலைத் புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

எனவே, சமன்பாடுகளில் $x = 0$ எனப் பிரதியிடுவர்

$$y^2 + c = 0 \quad (\text{அ - டு}) \quad y = \pm\sqrt{-c}.$$

\therefore வட்டங்கள் y ஆயத்தின் மீது வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் $A(0, \sqrt{-c})$, $B(0, -\sqrt{-c})$.

எனக் (i) $c = 0$ எனில் A, B இரு புள்ளிகளும் பொருத்தும் புள்ளிகள். AB என்ற பொது நாண் (சமத்தொடு அச்ச அல்லது y ஆயம்) அவ் வட்டங்களுக்கு அப்புள்ளி $(0, 0)$ -இடத்துத் தொடு கோடாகும். வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று உட்புறம் அல்லது வெளிப்புறம் தொடும்.

வட்ட மையங்கள் $(-g_1, 0)$, $(-g_2, 0)$ ஆகின், $g_1 < 0$, $g_2 < 0$ அல்லது $g_1 > 0$, $g_2 > 0$ எனில் வட்டங்கள் சமத்தொடு அச்சிற்கு ஒரே பக்கத்திலிருக்கும். அதாவது அவ் வட்டங்கள் தம்முள் உட்புறம் தொடும்.

$g_1 > 0$, $g_2 < 0$ அல்லது $g_1 < 0$, $g_2 > 0$ எனில், வட்டங்கள் சமத்தொடு அச்சிற்கு இரு பக்கங்களிலும் இருக்கும். அதாவது வட்டங்கள் தம்முள் வெளிப்புறம் தொடும்.

எனவே, $c = 0$, $g_1g_2 > 0$ எனில் வட்டங்கள் உள்மேயும், $c = 0$, $g_1g_2 < 0$ எனில் வட்டங்கள் வெளிமேயும் தொடும். தொடு புள்ளியிடத்துப் பொதுத் தொடு கோடு அளவகனின் சமத்தொடு அச்ச ஆகும்.

வகை (ii) $c < 0$ எனில், $\sqrt{-c}$ மெய் மதிப்புக் கொண் டிருக்கும். எனவே, வட்டங்கள் மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டும். $g_1g_2 > 0$ எனில் சமத்தொடு அச்சிற்கு ஒரே பக்கத்திலும், $g_1g_2 < 0$ எனில் எதிர் பக்கங்களிலும் இவ் வட்டங்கள் இருக்கும்.

வகை (iii) $c > 0$ எனில், $\sqrt{-c}$ கற்பனை மதிப்புக் கொண்டிருக்கும். அங்ஙனம் வட்டங்கள் மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டா.

5-13. எல்லைப் புள்ளிகள் (Limiting Points).

வகைவகை - பொது அச்ச ஒருத்திய வட்டங்களில் பூச்சியம் ஆரம் கொண்ட வட்டங்கள் அத்திய வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் எனப்படும்.

5-14. எல்லைய் புள்ளிகள் காணல்

பொது அச்ச வட்டங்களின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2gx + c = 0,$$

எனக் கொள்வோம்.

இவ்வட்டத்தின் ஆரம் $\sqrt{g^2 - c}$ ஆரம் பூச்சியமெனில், $g^2 - c = 0$ (அ-து) $g = \pm \sqrt{c}$. எனவே, $g = \sqrt{c}$, $g = -\sqrt{c}$ மதிப்புக்களுக்கு.

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{c}x + c = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{c}x + c = 0$$

$$(அ - து) (x + \sqrt{c})^2 + y^2 = 0,$$

$$(x - \sqrt{c})^2 + y^2 = 0 \quad \text{என்ற இரு வட்டங்கள்}$$

கிடைக்கும்.

இவைகளின் ஆரங்கள் பூச்சியமாதலின் பொது அச்ச வட்டங் களில் உள்ள எல்லைய்புள்ளிகள் இரண்டு ஆகும். அவை $(\sqrt{c}, 0)$ $(-\sqrt{c}, 0)$ ஆகும். இவைகள் மையப்பினைக் கோட்டில் சமத் தொடு அச்சுக்கு இரு பக்கத்திலும் சமதூரத்தில் இருக்கும். எல்லைய் புள்ளிகள், புள்ளி வட்டங்கள் (point circles) எனவும் கூறப்படுகின்றன.

$c > 0$ எனில் இப்புள்ளிகள் மெய்யானவை,

$c < 0$ எனில் இவைகள் கற்பனையானவை.

கோடு எவ்விதப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டம், பொது அச்ச வட்டங்கள் அளித்ததையும் செங்குத்தாய் வெட்டும்.

5-15. பொது அச்ச வட்டங்களின் எவ்விதப் புள்ளிகள் ஒன்றொரு வட்டத்தையும் சாத்த துணைவியம் புள்ளிகளாகும்.

பொது அச்ச வட்டங்களின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2gx + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இதன் எவ்விதப் புள்ளிகள் $(\sqrt{-c}, 0)$, $(-\sqrt{-c}, 0)$.

(1)-ஐச் சாத்த $(\sqrt{-c}, 0)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு,

$$x\sqrt{-c} + y(0) + g(x + \sqrt{-c}) + c = 0$$

(அ - து) $(g + \sqrt{-c})x + (g + \sqrt{-c})\sqrt{-c} = 0$

(அ - து) $(g + \sqrt{-c})(x + \sqrt{-c}) = 0$.

எனவே, இசைக் கோடு $(-\sqrt{-c}, 0)$ புள்ளி வழிச் செல்லும்

5-16. பொது அச்ச ஒழுநிலைக் குத்து வட்டங்கள் (Orthogonal System of Coaxial Circles)

பொது அச்ச வட்டங்களின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2gx + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

வட்டங்களின் மையம் கிணக்கோடு, சமத்தொடு அச்ச ஆய்வலை மூன்றாவே x, y ஆயங்கள் என ஏத்களவே நாம் கண்டுபிடிக்க. இவ்வமைப்பை அமைப்பு C எனக் குறிப்பிடுவோம்.

அமைப்பு C-யில் உள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்தையும்,

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + c = 0 \quad \dots \quad (2)$$

வட்டம் செங்கோணத்திற் வெட்டும் எனக் கொள்வோம்.

அமைப்பு C-யின் இது வட்டங்கள்,

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + c = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + c = 0 \quad \dots \quad (4)$$

எனில், வட்டங்கள் (8), (4)-ஐவும் வட்டம் (2) செங்கோணத்தில் வெட்டும்.

$$\therefore 2g_1 = k + c$$

$$2g_2 = k + c.$$

$$\therefore g(g_1 - g_2) = 0$$

$$g_1 - g_2 \neq 0. \quad \therefore g = 0.$$

மேலும் $2g_1 = k + c$ சமன்பாட்டில் $g = 0$ எனப் பிரதிபலித்தல், $k + c = 0$ (அ - து) $k = -c$ என்றாகும்.

எனவே, வட்டம் (2)

$$x^2 + y^2 + 2fy - c = 0 \quad \dots \dots (5)$$

என்றாகும்.

இச் சமன்பாட்டில் f ஒரு மாற, c ஒரு மாறிலி.

$$f\text{-இல் மதிப்பு எதுவாயினும், } x^2 + y^2 + 2gx + c = 0,$$

$x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$ வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டும், f -இல் பல்வேறு மதிப்புகளுக்குச் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$ பல்வேறு வட்டங்களைக் குறிக்கும். எனவே சமன்பாடு (5) ஒருநிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

மேலும் $f = f_1, f = f_2$ என்ற மதிப்புகளுக்குச் சமன்பாடு (5)

$$x^2 + y^2 + 2f_1y - c = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2f_2y - c = 0$$

என்ற வட்டங்களை அறிக்கும்.

இவைகளின் சமத்தொடு அச்சு,

$$(x^2 + y^2 + 2f_1y - c) - (x^2 + y^2 + 2f_2y - c) = 0$$

$$(அ து) (f_1 - f_2)y = 0$$

$$f_1 - f_2 \neq 0. \quad \therefore y = 0.$$

எனவே, x -ஆய் இவைகளின் சமத்தொடு அச்சு.

f_1, f_2 என்பவை f -இன் பாதேனும் இரு மதிப்புக்களாகும். எனவே, f -இன் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் (அ-து) இத்தலை வட்டங்கள் பாவதிற்கும் சமத்தொடு அச்ச x ஆயமெயாகும்.

$\therefore x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$ என்ற சமன்பாடு பொது அச்ச ஒருதலை வட்டங்களைக் குறிக்கும். இவ் வமைப்பை அமைப்பு C' எனக் குறிப்பிடுவோம். அமைப்பு C' -இல் உள்ள ஒவ்வொரு வட்டமும் அமைப்பு C -யில் உள்ள அனைத்து வட்டங்களையும் செங்கோணத்தில் வெட்டும். எனவே, அமைப்பு C' பொது அச்சச் செங்குத்து தலை வட்டங்கள் (orthogonal system of coaxial circles) இவ்வமைப்பிலுள்ள வட்டங்களின் மையங்களின் x ஆயத் தொலைகள் பூச்சியமாகும். எனவே, அனைத்து வட்டங்களின் மையங்களும் y ஆயத்தின் மீதமைத்திருக்கும். இவ்வமைப்பில் மையப் பீணிக்கொடு y ஆயம், சமத்தொடு அச்ச x ஆயம் ஆகும்.

5.17. $x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$ -த்தின் எல்லைப்புள்ளிகள்

$$x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$$

பொது அச்ச ஒருதலை குத்து வட்டங்கள் எனக் கொள்வோம்.

$$\text{இதன் ஆரம், } \sqrt{f^2 + c}$$

$$\text{இது பூச்சியமெனில், } f^2 + c = 0 \quad (\text{அ-து}) \quad f = \pm \sqrt{-c}$$

$$\text{எனவே, எல்லைப்புள்ளிகள், } (0, \sqrt{-c}), (0, -\sqrt{-c}).$$

$$5.18. \text{ அமைப்பு } C, x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$$

$$\text{அமைப்பு } C', x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$$

எனக்கொள்வோம்.

அமைப்பு C -யில் மையப் பீணிக்கொடும், பொது சமத்தொடு அச்சம் முறையே x, y ஆயங்கள் என நாம் கண்டோம். மேலும், அமைப்பு C' -இல் இவைகள் முறையே y, x ஆயங்கள் எனவும் கண்டோம்.

எனவே, ஒர் அமைப்பின் சமத்தொடு அச்சம், மையப் பீணிக்கொடும் முறையே இதன் செங்குத்து அமைப்பின் மையப் பீணிக்கொடும் பொது சமத்தொடு அச்சமாகும்.

5-19. ஓர் அமைப்பின் எல்லைப்புகளில்கள் அதன் செங்குத்து அமைப்பின் கீழேயும் புள்ளிகளாகும்.

அமைப்பு C'-இல் உள்ள யாதேனும் இரு வட்டங்கள்,

$$x^2 + y^2 + 2fy - c = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2f_1y - c = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

எனக்கொள்வோம்.

இவைகள் சமத்தொடு அச்சில் (x ஆயத்திலு) தம்முள் வெட்டுகின்றன. இச் சமன்பாடுகளில் $y = 0$ எனப்பிரதியிடுவர் $x = \pm \sqrt{c}$ என்றாகும். இவைகள் வெட்டும் புள்ளிகள் A', B' எனில், இவைகளின் ஆயத்தொலைகள் A'(\sqrt{c} , 0), B'($-\sqrt{c}$, 0). அமைப்பு C'-இல் உள்ள அனைத்து வட்டங்களும் இப் புள்ளிகள் வழிச் செல்கின்றன. ஆகவே, இப் புள்ளிகள் அமைப்பு C'-யின் எல்லைப் புள்ளிகள் எனப் பத்தி 5-14-இல் தாம் கண்டோம்.

5-20. ஓர் அமைப்பு வட்டங்களின் மெய்யான புள்ளிகளில் தம்முள் வெட்டினாலும் அதன் செங்குத்து அமைப்பு வட்டங்கள் கற்பனைப் புள்ளிகளில் தம்முள் வெட்டும்.

அமைப்பு C'-இல் உள்ள வட்டங்கள் தம்முள் வெட்டும் புள்ளிகள் (\sqrt{c} , 0), ($-\sqrt{c}$, 0), $c < 0$ எனில் வெட்டும் புள்ளிகள் மெய்யானவைவாகவும், $c > 0$ எனில் வெட்டும் புள்ளிகள் கற்பனையானவைவாகவும் இருக்கும். ஆகவே, அமைப்பு C'-யில், $c > 0$ எனில் வெட்டும் புள்ளிகள் கற்பனையானவைவாகவும், $c < 0$ எனில் மெய்யானவைவாகவும் இருக்கும் எனப் பத்தி 5-12-வரை (ii), (iii)-இல் கண்டோம்.

மேலும், C'-யில் வட்ட மையம் ($-f$, 0), ($-f$, 0) புள்ளிகளிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$ என்ற அமைப்பு C'-இன் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம், $\sqrt{f^2 - c}$. இஃது அமைப்பு C'-யிலுள்ள வட்டத்தின் ஆரமாகும். எனவே, ஓர் அமைப்பின் வட்டங்களில் யாதேனும் ஒன்றிலிருந்து அதன் செங்குத்து அமைப்பின் வட்டங்களில் யாதேனும் ஒன்றிற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் மூலம் அமைப்பின் வட்ட ஆரத்திற்குச் சமமாகும்.

5.21. $S_1=0$, $S_2=0$ இரு வட்டங்களின் இடைக்கோணத்தை அடங்குதலின் வட்டங்களின் சமன்பாடு,
 $S_1 + \lambda S_2 = 0$ ($\lambda \neq -1$)

$S_1 + \lambda S_2 = 0$ சமன்பாடு λ -இன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் ($\lambda \neq -1$), $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டங்களை அளிக்கும் எனப் பத்தி 6.7-இல் காட்டோம். (அ-து) $S_1 + \lambda S_2 = 0$ என்பது $S_1=0$, $S_2=0$ வட்டங்கள் தம்மால் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒருநிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

$S_1 + \lambda S_2 = 0$ குறிக்கும் ஒருநிலை வட்டங்களில் யாதொன்று இரண்டு $S_1 + \lambda_1 S_2 = 0$, $S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$ எனக் கொள்வோம்.

$$S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \text{ எனில்,}$$

$$S_1 + \lambda_1 S_2 = x^2 + y^2 + 2(g_1 + \lambda_1 g_2)x + 2(f_1 + \lambda_1 f_2)y + (c_1 + \lambda_1 c_2) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad x^2 + y^2 + \frac{2(g_1 + \lambda_1 g_2)}{1 + \lambda_1}x + \frac{2(f_1 + \lambda_1 f_2)}{1 + \lambda_1}y \\ + \frac{c_1 + \lambda_1 c_2}{1 + \lambda_1} = 0 \quad \dots \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{இவ்வாறே, } x^2 + y^2 + \frac{2(g_1 + \lambda_2 g_2)}{1 + \lambda_2}x + \frac{2(f_1 + \lambda_2 f_2)}{1 + \lambda_2}y \\ + \frac{c_1 + \lambda_2 c_2}{1 + \lambda_2} = 0. \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

இவ்வட்டங்களின் சமத்தொகு அச்சம்,

$$(1) - (2) = 0.$$

$$\text{(அ-து)} \quad \frac{S_1 + \lambda_1 S_2}{1 + \lambda_1} - \frac{S_1 + \lambda_2 S_2}{1 + \lambda_2} = 0.$$

$$\text{(அ-து)} \quad (1 + \lambda_2)(S_1 + \lambda_1 S_2) - (1 + \lambda_1)(S_1 + \lambda_2 S_2) = 0.$$

$$\therefore (\lambda_1 - \lambda_2)(S_1 - S_2) = 0$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \quad \therefore S_1 - S_2 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

ஆனால், சமன்பாடு (8), $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களின் சமத் தொடு அச்ச.

எனவே, $S_1 + \lambda S_2 = 0$ குறிக்கும் ஒருநிலை வட்டங்களில் ஒவ்வொரு இடைவட்ட வட்டங்களும் ஒரே கோட்டைச் சமத்தொடு அச்சாகக் கொண்டிருக்கும்.

$\therefore S_1 + \lambda S_2 = 0$ பொது அச்ச ஒருநிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

5-22. $L = 0$ கோடும், $S = 0$ வட்டமும் க்கெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் பொது அச்ச ஒருநிலை வட்டங்களின் சமன்பாடு $S + \lambda L = 0$.

$S + \lambda L = 0$ சமன்பாடு λ -வின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $S = 0$, $L = 0$ என்ற வட்டமும் கோடும் க்கெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒருநிலை வட்டங்களைக் குறிக்குமென நாம் பத்தி 5-8-இல் காண்டோம்.

$\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ என்ற இரு மதிப்புகளுக்கு $S + \lambda L = 0$ ஒருநிலை வட்டங்களின் இரு வட்டங்கள்,

$$S + \lambda_1 L = 0$$

$$S + \lambda_2 L = 0$$

கிடைக்கப் பெறும்.

இவைகளின் சமத்தொடு அச்ச,

$$(S + \lambda_1 L) - (S + \lambda_2 L) = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad (\lambda_1 - \lambda_2)L = 0.$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \quad \therefore L = 0.$$

λ_1 , λ_2 மதிப்புகள் λ -வின் வாதேனும் இரு மதிப்புகள் ஆதலின் $S + \lambda L = 0$ வட்டங்களின் பொது சமத் தொடு அச்ச $L = 0$ என்ற கோடாகும்.

எனவே, $S + \lambda L = 0$ எனும் சமன்பாடு $L = 0$ கோட்டைச் சமத்தொடு அச்சாகக் கொண்ட பொது அச்ச ஒருநிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

மேலே 7: $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$, $2x^2 + 2y^2 - 10y + 5 = 0$
வட்டங்கள் செத்த பொது அச்ச ஒருநிலை வட்டங்களின்
எல்லைப் புள்ளிகளையும், பொதுச் சமத்தொடு அச்சையும் காண்க.

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$2x^2 + 2y^2 - 10y + 5 = 0$$

$$(அ - 2) \quad x^2 + y^2 - 5y + \frac{5}{2} = 0 \quad \dots \quad (2)$$

என்பாடுகள் (1), (2) குறிக்ரும் வட்டங்களை செத்த பொது
அச்ச வட்டங்கள்.

$$(x^2 + y^2 + 2x - 6y) + \lambda \left(x^2 + y^2 - 5y + \frac{5}{2} \right) = 0$$

$$(அ - 2) \quad x^2(1 + \lambda) + y^2(1 + \lambda) + 2x - y(6 + 5\lambda) + \frac{5\lambda}{2} = 0$$

$$(அ - 2) \quad x^2 + y^2 + \frac{2}{1 + \lambda}x - \frac{(6 + 5\lambda)}{1 + \lambda}y + \frac{5\lambda}{2(1 + \lambda)} = 0.$$

$$\text{இதன் ஆரம்} = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{6 + 5\lambda}{2(1 + \lambda)}\right)^2 - \frac{5\lambda}{2(1 + \lambda)}}$$

எல்லைப் புள்ளிகள் பூச்சியம், ஆரம் கெண்ட வட்டங்களாகும்.

$$\therefore \frac{1}{(1 + \lambda)^2} + \frac{(6 + 5\lambda)^2}{4(1 + \lambda)^2} - \frac{5\lambda}{2(1 + \lambda)} = 0.$$

$$(அ - 2) \quad 4 + (6 + 5\lambda)^2 - 10\lambda(1 + \lambda) = 0.$$

$$\therefore 5\lambda^2 + 10\lambda + 8 = 0.$$

$$(அ - 2) \quad (\lambda + 2)(5\lambda + 4) = 0.$$

$$\text{எனவே, } \lambda = -2, \quad \lambda = -\frac{4}{5}.$$

எகிலிப் புள்ளிகள்,

$$\left[-\frac{1}{1+\lambda}, \frac{8+5\lambda}{8(1+\lambda)} \right], \quad \lambda = -2, \quad \lambda = -\frac{4}{3}.$$

(அ-து) (1, 2), (8, 1).

வீதிநோடு முறை

(1), (2) வட்டங்களின் சமநிலைத் துறை,

$$(x^2 + y^2 + 2x - 6y) - \left(x^2 + y^2 - 5y + \frac{5}{2} \right) = 0.$$

$$(அ-து) \quad 2x - y - \frac{5}{2} = 0.$$

பொது அச்ச வட்டங்கள்,

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + \lambda \left(2x - y - \frac{5}{2} \right) = 0.$$

$$(அ-து) \quad x^2 + y^2 + 2x(1 + \lambda) - y(6 + \lambda) - \frac{5}{2}\lambda = 0.$$

எகிலிப் புள்ளிகள் பூச்சியம் ஆகும் சென்னை வட்டங்கள்.

$$\therefore (1 + \lambda)^2 + \frac{(6 + \lambda)^2}{4} + \frac{5}{2}\lambda = 0$$

$$(அ-து) \quad 4(1 + \lambda)^2 + (6 + \lambda)^2 + 10\lambda = 0$$

$$\therefore \quad 5\lambda^2 + 80\lambda + 40 = 0$$

$$(அ-து) \quad \lambda^2 + 16\lambda + 8 = 0$$

$$\therefore \quad (\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0$$

$$\text{எனவே, } \lambda = -2, \lambda = -4$$

எகிலிப் புள்ளிகள்,

$$\left[-(1 + \lambda), \frac{6 + \lambda}{2} \right], \quad \lambda = -2, \quad \lambda = -4.$$

(அ-து) (1, 2), (8, 1).

மாதிரி 8 : $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $x^2 + y^2 + \lambda_1 x + k = 0$ வட்டங்களின் பொது தாண் ஒரு நிபேத புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

$$S_1 = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + \lambda_1 x + k = 0 \quad \dots \quad (2)$$

இவ் வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு, $S_1 - S_2 = 0$

$$(அ - து) \quad (x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) - (x^2 + y^2 + \lambda_1 x + k) = 0$$

$$(அ - து) \quad x(2g - \lambda_1) + 2fy + (c - k) = 0$$

$$(அ - து) \quad (2gx + 2fy + c - k) - \lambda_1 x = 0.$$

$\therefore S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு.

$2gx + 2fy + c - k = 0$, $x = 0$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும். λ -வின் ஆணத்து மதிப்புகளுக்கும் சமத்தொடு அச்சு அப் புள்ளி வழிச் செல்லாததின், அப் புள்ளி ஒரு நிபேத புள்ளியாகும்.

மாதிரி 9 : பொது அச்ச வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகளில் ஒன்று ஆதி. அதைச் சேர்த்த வட்டங்களில் ஒன்று $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனில், மற்ற எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க. பொது அச்ச வட்டங்களின் பொது அச்சு செங்குத்து வட்டங்களின் சமன்பாடு,

$$(x^2 + y_1^2)(g + \mu f) + c(x + \mu y) = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

ஒரு எல்லைப் புள்ளி ஆதி $(0, 0)$ ஆதலின், அப் புள்ளி வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$S = x^2 + y^2 = 0.$$

$$\text{மற்றொரு வட்டம், } S_1 = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

எனவே, பொது அச்ச வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$S + \lambda S_1 = 0.$$

$$(அ-து) \quad (x^2 + y^2) + \lambda(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) = 0.$$

$$(அ-து) \quad x^2(1 + \lambda) + y^2(1 + \lambda) + 2g\lambda x + 2f\lambda y + c\lambda = 0$$

$$(அ-து) \quad x^2 + y^2 + \frac{2g\lambda}{1+\lambda}x + \frac{2f\lambda}{1+\lambda}y + \frac{c\lambda}{1+\lambda} = 0. \dots (1)$$

இதன் ஆரம்,

$$\sqrt{\left(\frac{g\lambda}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{f\lambda}{1+\lambda}\right)^2 - \frac{c\lambda}{1+\lambda}}$$

இது பூச்சியமென்றால்,

$$\left(\frac{g\lambda}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{f\lambda}{1+\lambda}\right)^2 - \frac{c\lambda}{1+\lambda} = 0$$

$$(அ-து) \quad g^2\lambda^2 + f^2\lambda^2 - c\lambda(1+\lambda) = 0$$

$$(அ-து) \quad \lambda[(g^2 + f^2 - c)\lambda - c] = 0$$

$$\therefore \lambda = 0, \lambda = \frac{c}{c^2 + f^2 - c^2}$$

(1)-இன் மையம்,

$$\left(\frac{-g\lambda}{1+\lambda}, \frac{-f\lambda}{1+\lambda}\right).$$

$\lambda = 0$ எனில், மையம் புள்ளி, $(0, 0)$

$\lambda = \frac{c}{g^2 + f^2 - c}$ எனில், மையம் புள்ளி

$$\left[\frac{-cg}{g^2 + f^2 - c}, \frac{-cf}{g^2 + f^2 - c}\right].$$

எனவே, மற்ற மையம் புள்ளி,

$$\left[\frac{-cg}{g^2 + f^2 - c}, \frac{-cf}{g^2 + f^2 - c}\right].$$

பொது அச்ச வட்டங்களின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + \frac{2g\lambda}{1+\lambda}x + \frac{2f\lambda}{1+\lambda}y + \frac{c\lambda}{1+\lambda} = 0 \quad \dots (2)$$

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \dots (3)$$

எனும் வட்டம் பொது அச்ச வட்டங்கள் (2) அனைத்தையும் செங்குத்தாக வெட்டுகிறது.

$$\therefore \frac{2g\lambda}{1+\lambda}g_1 + \frac{2f\lambda}{1+\lambda}f_1 = \frac{c\lambda}{1+\lambda} + c_1$$

$$(அ-து) \quad 2gg_1\lambda + 2ff_1\lambda = c\lambda + c_1 + c_1\lambda$$

$$\therefore \quad 2gg_1 + 2ff_1 - c = \frac{c_1(1+\lambda)}{\lambda}$$

$$(அ-து) \quad 2gg_1 + 2ff_1 - c - \frac{c_1(1+\lambda)}{\lambda} = 0.$$

இது λ -யின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் பொருத்துமாதலின்,

$$2gg_1 + 2ff_1 - c = 0, \quad c_1 = 0.$$

$$\therefore \quad f_1 = \frac{c-2gg_1}{2f}.$$

சமன்பாடு (3)-இல் இதைப் பிரதியிடுகின்,

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2\left(\frac{c-2gg_1}{2f}\right)y = 0 \text{ என்கிறும்.}$$

$$(அ-து) \quad x^2 + y^2 + 2g_1\left[x + \frac{c-2gg_1}{2g_1f}y\right] = 0 \dots (4)$$

$$\mu = \frac{c-2gg_1}{2g_1f} \text{ எனக் கொண்டால்,}$$

$$c-2gg_1 = 2\mu g_1 f \quad (அ-து) \quad c = 2gg_1 + 2\mu g_1 f$$

$$\therefore \quad 2g_1 = \frac{c}{g + \mu f}.$$

இம் மதிப்பை (4)-இல் பிரதியிடுகின்

$$x^2 + y^2 + \frac{c}{g + \mu f} [x + \mu y] = 0 \text{ என்கிறும்.}$$

$$(அ-து) \quad (x^2 + y^2)(g + \mu f) + c(x + \mu y) = 0.$$

மாடு 10: A என்ற புள்ளியின் இரு நிலையான வட்டம் கவியச் சென்ற இதைக் கொடுக்க B -இல் வெட்டுகின்றன எனின், இவ் வரையானவற்றை நிறுவுக.

(i) AB -இ வட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் இரு நிலைத்த புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும்.

(ii) AB -ஐ வீட்டமாகக் கொண்ட வட்டம், நிலை வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டுகிறது.

(iii) நிலை வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்ச AB -ஐ இது சமமாகப் பிரிக்கிறது.

நிலை வட்டங்கள்,

$$x^2 + y^2 + 2\lambda_1 x + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2\lambda_2 x + c = 0 \quad \dots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

இவ் வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்ச,

$$(x^2 + y^2 + 2\lambda_1 x + c) - (x^2 + y^2 + 2\lambda_2 x + c) = 0.$$

$$(அ-து) \quad (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0.$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0. \quad \therefore x = 0.$$

A புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள், (x_1, y_1) எனில் வட்டங்கள் (1), (2)-ஐச் சாத்த அதன் இயைக்கோடுகள்,

$$xx_1 + yy_1 + \lambda_1(x+x_1) + c = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$xx_1 + yy_1 + \lambda_2(x+x_1) + c = 0 \quad \dots \quad (4)$$

இவைகள் வெட்டும் புள்ளி B ஆகும்.

(3)-இலிருந்து (4)-ஐக் கழிக்க,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x+x_1) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0, \quad x = -x_1$$

இதை (3)-இல் பிரதியிடுவ்,

$$-x_1^2 + yy_1 + c = 0 \quad \therefore y = \frac{x_1^2 - c}{y_1}$$

எனவே, B யின் ஆயத் தொலைகள்,

$$\left(-x_1, \frac{x_1^2 - c}{y_1}\right).$$

(i) AB -ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்,

$$(x-x_1)(x+x_1) + (y-y_1)\left(y - \frac{x_1^2-c}{y_1}\right) = 0$$

$$(அ-து) \quad x^2 - x_1^2 + y^2 - y\left(\frac{x_1^2-c}{y_1}\right) - yy_1 + (x_1^2-c) = 0$$

எனவே, AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்,

$$x^2 + y^2 - \left(y_1 + \frac{x_1^2-c}{y_1}\right)y - c = 0. \quad \dots (5)$$

சமன்பாடு (5)-இல் $y = 0$ எனப் பிரதியிட,

$$x^2 - c = 0 \text{ என்றும்,}$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{c} \quad (c \text{ ஒரு மாநிலி}).$$

எனவே, AB -ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் (5) திவத்த புள்ளிகளான $(\sqrt{c}, 0), (-\sqrt{c}, 0)$ வழிச் செல்லும்.

(ii) வட்டம் (6) வட்டங்கள் (1), (2)-ஐச் செங்குத்தாக வெட்டினும்,

$$2\lambda_1(0) + 2(0)\left[y_1 + \frac{x_1^2-c}{y_1}\right] = c-c$$

$$(அ-து) \quad 0 = 0 \text{ என்றும்,}$$

எனவே, வட்டம் (6) விட்டங்கள் (1), (2)-ஐச் செங்குத்தாக வெட்டும்,

(iii) வட்டங்கள் (1), (2)-இன் சமத்தொடு அச்ச $x = 0$.

$$AB\text{-இன் மையப் புள்ளி } x = \frac{x_1-x_1}{2} = 0.$$

$$y = \frac{y_1 + \frac{x_1^2-c}{y_1}}{2}$$

எனவே, AB -இன் மையப் புள்ளி $x = 0$ என்ற சமத் தொடு அச்ச மீது அமைந்துள்ளது.

(அ-து) $x = 0$ (y ஆயம்) என்ற சமத்தொடு அச்ச AB -ஐ இரு சமமாகப் பிரிக்கிறது.

பயிற்சி 5.2.

1. (1, 2), (3, 4) என்ற எல்லைப் புள்ளிகளைக் கொண்ட பொது அச்ச வட்டங்களில் ஒன்று ஆதி வழிச் செல்லின், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.
2. $x^2 = y^2 - 6x - 6y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 8 = 0$ வட்டங்களைக் கொண்ட பொது அச்ச வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்ச, எல்லைப் புள்ளிகள் காண்க.
3. λ -வின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $x^2 + y^2 + 2ax + 2by - 2\lambda(ax - by) = 0$ என்ற சமன்பாடு பொது அச்ச ஒருநிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. சமத்தொடு அச்சக் காண்க.
4. பொது அச்ச வட்டங்களைச் சேர்ந்த மூன்று வட்டங்களுக்கு ஒரு நிலைத் புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் மூன்றையே t_1, t_2, t_3 ஆகும். P, Q, R அவ் வட்டங்களின் மையங்கள் எனின்,

$$QR.t_1^2 + RP.t_2^2 + PQ.t_3^2 = 0$$
 என நிறுவுக.
5. ஆதியை ஓர் எல்லைப் புள்ளியாகக் கொண்ட பொது அச்ச வட்டங்களில் ஒன்று $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 26 = 0$ எனின், மற்ற எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க.
6. $x^2 + y^2 - 2x = 0$ சேர்ந்த பொது அச்ச வட்டங்களின் ஓர் எல்லைப் புள்ளி (4, 4) எனில் மற்ற எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க.
7. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சக் காண்க.
8. $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ வட்டங்களின் பொது நாளை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
9. $x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ வட்டங்கள் சேர்ந்த பொது அச்ச ஒருநிலை வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் யாவை?

10. $x^2+y^2+x-7y=0$, $x^2+y^2-8x-4y=0$ வட்டங்களின் பொது தாளின் தீர்வு என்ன?
11. $x^2+y^2-2x+8y-8=0$, $x^2+y^2+2x+4y+1=0$, $2x^2+2y^2+8x+8y-8=0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு வரைச் சத்தியைக் காண்க.
12. இரு வட்டங்களைச் சேர்ந்த P புள்ளியின் இரைக்கோடுகள் Q -வில் வெட்டுகின்றன. அங்வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்ச PQ -ஐ இரு சமமாகப் பிரிக்கிறது என நிறுவுக.
13. கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு வட்டங்களும், அமைகளின் வடிவொப்ப வட்டமும் (circle of similitude) பொது அச்ச வட்டங்கள் என நிறுவுக.
14. $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ வட்டங்கள் வெட்டுப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம் $x+2y=8$ கோட்டைத் தொடுமெனில், அங்வட்டத்தின் சமப்பாடு காண்க.
15. $x^2+y^2+4x+8y+2=0$, $x^2+y^2+2x+8y+1=0$ வட்டங்களின் பொது தாளை விட்டதாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமப்பாடு காண்க.
16. P புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2-2x-4y+4=0$, $x^2+y^2+10x+12y+45=0$ வட்டங்களுக்கு வரைபுத் தொடு கோடுகளின் தீர்வு $8:4$ விகிதத்திலிருப்பின், P -யின் இயங்கு வழி ஒரு வட்டம் என நிறுவுக. இவ்விட்டமும் மற்ற இரு வட்டங்களும் பொது அச்ச வட்டங்கள் என நிறுவுக.
17. $(0,0)$, (a,b) புள்ளிகளை எல்லைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட பொது அச்ச வட்டங்களின் சமப்பாடு $x^2+y^2+\lambda(2ax+2by-a^2-b^2)=0$ என நிறுவுக.
18. $(2,1)$ -ஐ எல்லைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட பொது அச்ச வட்டங்களில் ஒன்று $x^2+y^2-8x-4y-8=0$ எனில், சமத்தொடு அச்ச, மீத்தோர் எல்லைப்புள்ளி காண்க.
19. இரு வட்டங்கள் மூன்றுவது வட்டத்தைச் செங்கோணத்தில் வெட்டினால், அங்விரு வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்ச மூன்றுவது வட்டத்தின் மையம்வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

20. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 8 = 0$ வட்டங்களின் கொண்ட பொது அச்ச வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் காணவ?
21. $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ பொது அச்ச வட்டங்களைச் சாத்திய $lx + my = 1$ கோட்டின் இடைப்புள்ளிகள் $x(mx - ly) - y - mc = 0$ என்ற வளைவரையின் மீது அமைவது என நிறவுக.
22. $x^2 + y^2 + x + 5y - 2 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x + 5y - 4 = 0$ வட்டங்களின் பொது நாண் விட்டமாகக் கொண்ட விட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
23. $y = 7$ என்ற கோட்டின் விட்டமாகவும், $(3, 0)$ புள்ளி வழிவரக்கூடிய செல்லும் வட்டங்களின் பொதுச் சமன்பாடு காண்க. இவைகள் பொது அச்ச வட்டங்கள் என நிறுவச் சமத்தொடு அச்சக் காண்க.
24. $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + (y-b)^2 = b^2$ வட்டங்களின் பொது நாண் விட்டமாகக் கொண்ட விட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
25. ஒரு வட்டத்தைச் சாத்திய நுண்ணியப் புள்ளிகள் A, B எனில், AB -ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் மூலக் வட்டத்தைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் என நிறவுக.

விடைகள்

1. $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$. 2. $4x + 2y = 1$; $(-1, 1)$; $\left(\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$. 3. $ax - by = 0$. 5. $(2, 8)$. 6. $\left(\frac{28}{25}, \frac{4}{25}\right)$. 7. $2x + y - 2 = 0$. 8. $5x^2 + 5y^2 - 8x - 16y + 12 = 0$. 9. $(1, -1)$, $(5, -1)$. 10. 5. 11. $\left(\frac{5}{2}, 7\right)$. 12. $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$. 13. $2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$. 14. $x + y + 4 = 0$; $(-5, -5)$. 15. $(-1, 1)$; $\left(\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$. 16. $x^2 + y^2 - 14y - 2 + 2g(x-3)$; $x = 3$. 17. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 2ab(bx + ay)$.

6. பரவளைவு (Parabola)

6.1. கூம்பு வெட்டி - வளையறை (Conic Section)

நிலைத்த புள்ளி ஒன்றிலிருந்து P என்ற யாதேஜும் ஒரு புள்ளிக்கு உள்ள தூரமும், நிலையான ஒரு கோட்டிலிருந்து அப் புள்ளிக்கு (P) உள்ள தூரமும் மொது விகிதத்திலிருப்பின், P -யின் இயல்பு வழி கூம்பு வெட்டி எனப்படும்.

மாறு விகிதத்தை வளைத்தொலை விகிதம் (eccentricity) எனக் கூறுகிறோம். இதை e எனக் குறிப்பிடுவது மரபு.

நிலைத்த புள்ளி குவியம் (focus) எனவும், நிலையான கோடு இயக்குவரை (directrix) எனவும் கூறப்படுகின்றன. குவியத்தை F , இயக்குவரையையும் மூன்றையே S, l எனக் குறிப்பிடுகோம்.

$e = 1$ எனில், P -யின் இயக்கு வழியான கூம்பு வளைவு பரவளைவு (parabola) எனப்படும் $e < 1$ எனில் அது தீள் வட்டம் (ellipse) எனவும், $e > 1$ எனில் அதிபரவளைவு (hyperbola) எனவும் கூறப்படும்.

6.2. பரவளைவின் சமன்பாடு

இயக்குவரை $lx + my + n = 0$ எனவும், $S(\alpha, \beta)$ புள்ளி குவியம் எனவும் கொள்வோம்.

$P(x_1, y_1)$ என்பது பரவளைவின் மீதுள்ள யாதேஜும் ஒரு புள்ளி எனின், இயக்குவரைக்கு P -யிலிருந்து PM என்ற செங்குத்துக்கோடு வரையவும்

வரைவறையுள்ளபடி,

$$\frac{SP}{PM} = e = 1$$

பரவளைவின் வரையறைப்படி A புள்ளி ஆவ வளைவின் மீது அமைவும். $P(x_1, y_1)$ என்பது பரவளைவின் மீதுள்ள பாடுதலும் ஒரு புள்ளி யெனில், P -யிலிருந்து இயக்கு வரைக்கு வரையப்படும் PM என்ற செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $(x_1 + a)$ ஆகும்.

$$\text{மேலும், } SP = \sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2}$$

$$\text{வரையறைப்படி } \frac{SP}{PM} = e = 1$$

$$(\text{அ.து}) \quad SP^2 = PM^2$$

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = (x_1 + a)^2$$

$$\therefore y_1^2 = 4ax_1$$

எனவே, பரவளைவின் சமன்பாடு (P -யின் இயங்கு வழி)

$$y^2 = 4ax.$$

$$(\text{அ.து}) \quad PN^2 = 4AS \cdot AN.$$

6-4. பரவளைவின் முனை, அச்சு, முனைவட்டத்துத் தொடுகோடு

$A(0, 0)$ என்ற புள்ளி பரவளைவின் முனை (vertex) எனவும், x, y ஆயங்கன் முதறியை அதன் அச்சு (axis), முனைவட்டத்துத் தொடுகோடு (tangent at the vertex) எனவும் கூறப்படுகின்றன.

6-5. செங்கவகைம் (Latus Rectum)

குளியம் (S) வழியாக x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக வரையும் கோடு பரவளைவை L, L' புள்ளிகளில் வெட்டினும், LSL' என்னுள்ள பரவளைவின் செங்கவகைம் (latus rectum) எனப்படுகிறது.

$y^2 = 4ax$ பரவளைவின் L புள்ளியின் y ஆயத்தொலை SL , x ஆயத்தொலை $AS = a$ ஆகும். L புள்ளி பரவளைவின் மீதுள்ளதாம்,

$$y^2 = 4a \cdot a = 4a^2$$

$$\therefore y = \pm 2a$$

எனவே, $SL = 2a$ \therefore செங்கவகைத்தின் நீளம்,

$$SL + SL' = 2a + 2a = 4a.$$

6-6. இயக்குவரை (Directrix)

$y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு இயக்குவரை y ஆயத்திற்கு இணை வாக $-a$ தூரத்திலிருப்பதாக இயக்கு வரையின் சமன்பாடு,

$$x = -a$$

$$(அ-து) \quad x + a = 0.$$

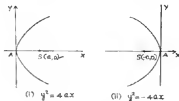
6-7. $Y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தன்மைகள்

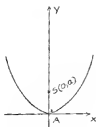
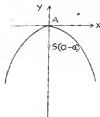
x -இன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் y சமமும் எதிர்மமான இரு மதிப்புகள் கொண்டிருக்கும். எனவே பரவளைவு x ஆயத்திலுள்ள சமச்சீர் (symmetric) உடையதாகும்.

$x = 0$ எனில், $y = 0$. எனவே, பரவளைவு ஆதிவழிச் செல்லும். x -இன் எதிர்மன் மதிப்புக்களுக்கு y -இன் மதிப்புகள் கற்பனை ஆதலின் பரவளைவின் புள்ளிகள் Y ஆயத்தின் இடப்புறமீறா. (அ-து) y ஆயத்தின் வலப்பக்கத்தில் வளைவரை இருக்கும்.

x -இன் மதிப்பு அதிகரிப்பின் y -இன் மதிப்பும் அதிகரிக்கும். x மதிப்புக் கத்தழியை (infinity) நெருங்கின் y -இன் மதிப்பும் கத்தழியை நெருங்கும். $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் அமைப்புப் படம் 48-இல் உள்ளது போலிருக்கும். பரவளைவின் இரு பிரிவுகளும் y ஆயத்திற்கு வலப்பக்கத்தில் கத்தழியை நெருங்கிச் செல்லும்.

6-8. பரவளைவின் சில வடிவங்கள்



(iii) $x^2 = 4ay$ (iv) $x^2 = -4ay$

படம் 44.

எதிர் 1: (1, 2) புள்ளியைக் குவியமாகவும், $x + y = 2$ கோட்டை இயக்குவதற்காகவும் கொண்டு பரவளவின் சமன்பாடு காண்க.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி பரவளவின் மீதுள்ளது எனக் கொள்வோம். $S(1, 2)$ ஆதலின்,

$$SP = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2}$$

$x + y - 2 = 0$ இயக்குவதிலிருந்து $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளிக்கு உள்ள தூரம்,

$$\frac{x_1 + y_1 - 2}{\pm \sqrt{1^2 + 1^2}}$$

வரையறையிலும்,

$$\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2} = \frac{x_1 + y_1 - 2}{\pm \sqrt{2}}$$

$$(அ - ஐ) \quad 2[(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2] = (x_1 + y_1 - 2)^2.$$

$$\begin{aligned} 2[x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 4y_1 + 5] \\ = x_1^2 + y_1^2 + 4 + 2x_1y_1 - 4x_1 - 4y_1 \end{aligned}$$

$$\therefore x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 - 4y_1 + 6 = 0$$

எனவே, பரவளைவின் சமன்பாடு (P -யின் இயக்கு வழி)

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 8 = 0.$$

மாநில 2 : $y^2 + 4x - 2y + 8 = 0$ என்ற பரவளைவின் செவ்வகம், மூளை, குளியல், அச்சு, இயக்கு வரை முதலியவற்றைக் காண்க.

$$y^2 + 4x - 2y + 8 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = -4x - 8$$

$$(அ - து) (y-1)^2 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

ஆதிதய $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ புள்ளிக்கு மாநிலம் பரவளைவின் சமன்பாடு $Y^2 = -4X$ என்றும்.

புதிய ஆயங்களைச் சாத்திய $y^2 = -4x$ பரவளைவின்

செவ்வகம் 4 [$\because a = 1$]

மூளை ($X=0, Y=0$)

குளியல் ($X=-1, Y=0$)

அச்சு $Y=0$

இயக்குவரை $X=-1=0.$

எனவே, பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்தும்
செவ்வகம் 4

$$\text{மூளை } \left(x + \frac{1}{2} = 0, y-1=0\right) \quad (அ-து) \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

$$\text{குளியல் } \left(x + \frac{1}{2} = -1, y-1=0\right) \quad (அ-து) \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

அச்சுச் சமன்பாடு $y-1=0.$

இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x + \frac{1}{2} - 1 = 0$

$$(அ-து) 2x-1=0.$$

$$(அ - து) \quad c = \frac{a}{m}.$$

எனவே, $y = mx + c$ கோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடுகோடுகளில், $c = \frac{a}{m}$ ஆகும்.

(அ - து) $y = mx + \frac{a}{m}$ எனும் கோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடுகோடாகும்.

6-10. $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்குப் புறத்தேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு தொடுகோடுகள் வரையக் கூடும்.

$y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்குப் புறத்தே உள்ள புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

$$\text{பரவளைவின் தொடுகோடு } y = mx + \frac{a}{m}.$$

$$\text{இது } (x_1, y_1) \text{ புள்ளி வழிச் செல்வின் } y_1 = mx_1 + \frac{a}{m}.$$

$$(அ - து) \quad m^2x_1 - my_1 + a = 0 \quad \dots \quad (1)$$

இது m -இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின், m -யிற்கு இரு மதிப்புகள் உண்டு. ஆகையால் m_1, m_2 எனக் கொள்வோம்.

$$\text{இம்மதிப்புகளை } y = mx + \frac{a}{m} \text{-இல் பிரதியிடுவர்,}$$

$$y = m_1x + \frac{a}{m_1}$$

$$y = m_2x + \frac{a}{m_2}$$

என்ற இரு தொடுகோடுகள் கிடைக்கப்பெறும்.

எனவே, புறத்தேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளைவிற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையக்கூடும்.

நினை : இவர்க்கு வரையிடுவதன் ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையுந் தொடுகோடுகள் தம்மூன் செங்குத்தாக இருக்கும்.

6.11. $y^2 = 4ax$ பாவனைசித்த (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடு கோடு

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்பவைய பாவனைவின் மீது மிக அருகாமையிலுள்ள புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore y_1^2 = 4ax_1 \quad \dots \quad (1)$$

$$y_2^2 = 4ax_2 \quad \dots \quad (2)$$

$$\text{எனவே, } y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$$

$$(அ - ஆ) \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4a}{y_1 + y_2} \quad \dots \quad (3)$$

P, Q புள்ளிகளைச் செங்குத்தும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

$$\begin{aligned} (அ - ஆ) \quad y - y_1 &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1) \\ &= \frac{4a}{y_1 + y_2} (x - x_1) \quad \dots \quad (4) \end{aligned}$$

[சமன்பாடு (3)-இல் டி.பி.]

PQ என்ற நான் P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின்,

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1.$$

இம்மதிப்புகளை (4)-இல் பிரதியிடின்,

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1} (x - x_1)$$

$$\therefore yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$$

$$(அ - ஆ) \quad yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$$

இரு பக்கமும் $-2ax_1$ -ஐக் கூட்டினால்,

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1 = 0 \quad [\because \text{சமன்பாடு (1)}]$$

$\therefore P(x_1, y_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = 0.$$

6.12. $y = mx + \frac{a}{m}$ தொடுகோடு, $y^2 = 4ax$ பரவளைவைத் தொடும் புள்ளி

$$y = mx + \frac{a}{m} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$y^2 = 4ax \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

கோடு (1), பரவளைவு (2)-ஐத் தொடும் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியிலுத்துப் பரவளைவின் தொடுகோடு,

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = 0.$$

$$(அ - து) \quad yy_1 - 2ax + 2ax_1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (3) ஒரே நேரிக் கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{y}{y_1} = \frac{m}{2a} = \frac{\frac{a}{m}}{2ax_1}$$

$$\therefore x_1 = \frac{a}{m^2}, y_1 = \frac{2a}{m}.$$

எனவே, $y = mx + \frac{a}{m}$ தொடுகோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவைத்

தொடும் புள்ளி $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m} \right)$.

6.13. தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ புள்ளிகளிலுத்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு வரையும்தொடுகோடுகள்,

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$yy_2 = 2a(x + x_2) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ஐத் தீர்க்க வெட்டும் புள்ளிகள் கிடைக்கப் பெறும்.

(1)-இலிருத்து (2)-ஐக் கழிப்பீன்

$$y(y_1 - y_2) = 2a(x_1 - x_2)$$

$$(அ-து) \quad y = \frac{2a(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2}$$

$$\text{ஆனால் } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4a}{y_1 + y_2} \quad [\text{பத்தி 6-11, சமன்பாடு 8}]$$

$$\therefore y = 2a \frac{y_1 + y_2}{4a} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

சமன்பாடு மதிப்பை (1)-ஐப் பிரதியிடுக,

$$\frac{y_1 + y_2}{2} y_2 = 2a(x + x_1)$$

$$\therefore x = \frac{\frac{(y_1 + y_2)y_2}{2} - 2ax_1}{2a} = \frac{y_1^2 + y_1y_2 - 4ax_1}{4a}$$

$$= \frac{y_1y_2}{4a} \quad [\because y_1^2 - 4ax_1 = 0].$$

எனவே, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) புள்ளிகளிடத்து $y^2 = 4ax$ பரவளவிற்கு கங்கர்டு தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி,

$$\left(\frac{y_1y_2}{4a}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

6-14. (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$பரவளவு $y^2 = 4ax$ எனின்,$$

(x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$yy_1 = 2a(x + x_1)$$

$$\text{தொடு கோட்டின் சரிவு} = \frac{2a}{y_1}.$$

$\therefore (x_1, y_1)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் சரிவு,

$$= -\frac{y_1}{2a} \quad \text{ஆனால், } (\because m_1m_2 = -1).$$

எனவே, செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1).$$

மாதிரி 3 : குளியல் (S) வழிச் செல்லும் ஒரு கோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவை P, P' புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. P, P' புள்ளிகளிடத்துப் பரவளைவிற்கு வரையும் தொடுகோடுகள் இவர்க்கு வரையின்றீது தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டும் என நிறுவுக.

$P(x_1, y_1), P'(x_2, y_2)$ எனக் கொள்வோம்.

PP' என்ற நேரணின் சமன்பாடு,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

$$(அ - ஐ) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

$$\text{ஆனால், } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4a}{y_1 + y_2} \text{ [பத்தி 6-11-சமன்பாடு 8].}$$

$$\therefore y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2} (x - x_1)$$

இது குளியல் $S(a, 0)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\text{எனவே, } -y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2} (a - x_1)$$

$$(அ - ஐ) \quad -y_1^2 - y_2 y_1 = 4a^2 - 4ax_1$$

$$\therefore y_1 y_2 = -4a^2 \quad \dots \quad = \quad = \quad (1)$$

$$[\because y_1^2 - 4ax_1 = 0]$$

$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ புள்ளிகளிடத்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் சரிவுகள் மூன்றாவே,

$$\frac{2a}{y_1}, \frac{2a}{y_2}.$$

இவைகள் தம்முள் செங்குத்தானவை யாதலின்,

$$\frac{2a}{y_1} \cdot \frac{2a}{y_2} = -1$$

$$(அ - ஐ) \quad y_1 y_2 = -4a^2$$

ப. வ. = 12

இது (1)-இன்படி, மெய்வாதனின், (x_1, y_1) , (x_2, y_2) புள்ளி கவிடத்து காரையும் தொடுகோடுகள் தம்மூன் செங்குத்தாய் வெட்டும்.

மேலும் இரு தொடுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளி,

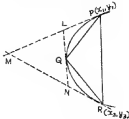
$$\left(\frac{y_1 y_2}{4a}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad [\text{பத்தி 8-18}]$$

வெட்டும் புள்ளியின் x ஆயத் தொலை,

$$x = \frac{y_1 y_2}{4a} = \frac{-4a^2}{4a} = -a.$$

எனவே, அத் தொடுகோடுகள் $x + a = 0$ என்ற இயக்கு காரையின் மீது வெட்டும்.

மாதிரி 4: P , Q , R என்ற உச்சிகளின் பரவளையவீற்று கொண்டுள்ள ஒரு மூக்கோணத்தின் பரப்பு, அம் வளைவிற்கு அப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளால் அமைவது மூக்கோணத்தின் பரப்பில் இரு மடக்காரும் என நிறுவுக.



படம் 48.

பர வளைவு $y^2 = 4ax$ எனவும், P , Q , R புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) எனவும் கொள்ளோம்.

$P(x_1y_1)$ புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு.

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \quad \dots \quad (1)$$

$Q(x_2y_2)$ புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு.

$$yy_2 = 2a(x + x_2) \quad \dots \quad (2)$$

$R(x_3y_3)$ புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு.

$$yy_3 = 2a(x + x_3) \quad \dots \quad (3)$$

தொடுகோடுகள் (1), (2) வெட்டுப் புள்ளி,

$$L \left(\frac{y_1y_2}{4a}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

தொடுகோடுகள் (2), (3) வெட்டுப் புள்ளி,

$$N \left(\frac{y_2y_3}{4a}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right)$$

தொடுகோடுகள் (3), (1) வெட்டுப் புள்ளி,

$$M \left(\frac{y_3y_1}{4a}, \frac{y_3 + y_1}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta LMN &= \frac{1}{2} \left[\frac{y_1 - y_2}{4a} \left(\frac{y_2 + y_3}{2} - \frac{y_3 + y_1}{2} \right) \right. \\ &\quad + \frac{y_2y_3}{4a} \left(\frac{y_3 + y_1}{2} - \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\ &\quad \left. + \frac{y_3y_1}{4a} \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{y_2 + y_3}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16a} [y_1y_2(y_2 - y_1) + y_2y_3(y_3 - y_1) + y_3y_1(y_1 - y_2)].$$

$$\begin{aligned} \Delta PQR &= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{y_1^2}{4a} (y_2 - y_3) + \frac{y_2^2}{4a} (y_3 - y_1) + \frac{y_3^2}{4a} (y_1 - y_2) \right] \\ &= \frac{1}{8a} [y_1^2(y_2 - y_3) + y_2^2(y_3 - y_1) + y_3^2(y_1 - y_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8a} [y_1 y_2 (y_1 - y_2) + y_2 y_3 (y_2 - y_3) + y_3 y_1 (y_3 - y_1)] \\
&= -\frac{1}{8a} [y_1 y_2 (y_2 - y_1) + y_2 y_3 (y_3 - y_2) + y_3 y_1 (y_1 - y_2)]
\end{aligned}$$

∴ ΔPQR -இன் எண்ணளவு,

$$= \frac{1}{8a} [y_1 y_2 (y_2 - y_1) + y_2 y_3 (y_3 - y_2) + y_3 y_1 (y_1 - y_2)].$$

$$\begin{aligned}
2\Delta LMN &= 2 \frac{1}{8a} [y_1 y_2 (y_2 - y_1) + y_2 y_3 (y_3 - y_2) \\
&\quad + y_3 y_1 (y_1 - y_2)] \\
&= \frac{1}{4a} [y_1 y_2 (y_2 - y_1) + y_2 y_3 (y_3 - y_2) \\
&\quad + y_3 y_1 (y_1 - y_2)] \\
&= \Delta PQR
\end{aligned}$$

மாதி 5 : $y^2 = 4ax$ டிவீனியெற்றிடு வரையல் இது தொடு கோடுகள் x ஆகத்துடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் θ_1, θ_2 , $\tan \theta_1, \tan \theta_2$ ஒரு மாதிரி எவ்வளவு, அது தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனில், இது புள்ளி வழிக் செல்லும் இது தொடு கோடுகளின் சரிவுகளான m_1, m_2 என்பவை பத்தி 6-10-இல் சமன்பாடு (1)-இன் படி.

$$m^2 x_1 - m y_1 + a = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் கிடைக்கின்றன.

$$\therefore m_1 + m_2 = \frac{y_1}{x_1}$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{x_1}.$$

$$\tan \theta_1, \tan \theta_2 = \text{ஒரு மாதிரி} = K \text{ (என்க)}.$$

$$\therefore m_1 m_2 = K$$

$$(3)-(2) \quad \frac{a}{x_1} = K.$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயக்குவழி

$$\frac{y}{x} = K$$

(அ-து) $Kx - y = 0$ ஆகும்.

6-15. துணை அளவு (Parameter)

t -யின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $x = at^2$, $y = 2at$ என்பது $y^2 = 4ax$ பரவளையில் பொருத்தும். எனவே, t -யின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $(at^2, 2at)$ என்ற புள்ளி அப்பரவளையின் மீதமையும். t -க்குத் துணை அளவு என்று பெயர். எனவே, $y^2 = 4ax$ பரவளையின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியை t^2 எனக் குறிப்பிடுவர். அப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(at^2, 2at)$ எனப் பெருள்.

6-16. $y^2 = 4ax$ பரவளையின்மீது $P(t_1)$, $Q(t_2)$ புள்ளிகளைக் கோக்கும் கோடு

பரவளையு $y^2 = 4ax$.

P , Q புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் மூன்றையே

$$(at_1^2, 2at_1), (at_2^2, 2at_2).$$

∴ PQ கோட்டின் சமன்பாடு.

$$\frac{y - 2at_1}{2at_1 - 2at_2} = \frac{x - at_1^2}{at_1^2 - at_2^2}$$

$$(அ - து) \quad \frac{y - 2at_1}{2} = \frac{x - at_1^2}{t_1 + t_2}$$

$$∴ y(t_1 + t_2) = 2x - 2at_1^2 + 2at_1(t_1 + t_2)$$

$$(அ - து) \quad y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1t_2$$

∴ நான் PQ -யின் சமன்பாடு,

$$y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1t_2.$$

இனி : ' t_1 ' புள்ளியிலிருந்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$y(t_1 + t_1) = 2x + 2at_1^2$$

$$(அ - து) \quad y = \frac{x}{t_1} + at_1.$$

6-17. தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு t_1, t_2 புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள்,

$$yt_1 = x + at_1^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$yt_2 = x + at_2^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

(1)-இலிருந்து (2)-ஐக் கழிப்பின்,

$$y(t_1 - t_2) = a(t_1^2 - t_2^2)$$

$$\therefore y = a(t_1 + t_2)$$

இம் மதிப்பை (1)-இல் பிரதியிடின்,

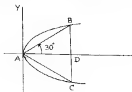
$$a(t_1 + t_2)t_1 = x + at_1^2$$

$$\therefore x = at_1t_2$$

எனவே, $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு " t_1 ", " t_2 " புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி,

$$\{at_1t_2, a(t_1 + t_2)\}.$$

மேலிச் 6 : $y^2 = 4ax$ பரவளைவினுள் வரையப்படும் சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளில் ஒன்று பரவளைவின் முனைமேலில், அம்முக்கோணத்தின் பக்கத்தின் நீளம் காண்க.



படம் 47

$y^2 = 4ax$ பரவளைவின் முனை $A(0, 0)$. ABC என்பது பரவளைவின் உள் வரையப்பட்டுள்ள முக்கோணம் (inscribed triangle).

ஆதிவழிச் செல்லும் AB கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x-0}{\cos 80} = \frac{y-0}{\sin 80} = r.$$

எனவே, AB கோட்டின் மீதுள்ள B புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(r \cos 80, r \sin 80)$.

இப்புள்ளி பரவளைவின் மீதமைந்துள்ளதால்,

$$(r \sin 80)^2 = 4a(r \cos 80)$$

$$r^2 \sin^2 80 = 4ar \cos 80$$

$$r \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 4a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\therefore r = 4a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{1}$$

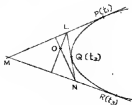
$$(அ - ஐ) \quad r = 6a\sqrt{3}.$$

எனவே, AB பக்கத்தின் நீளம் $8a\sqrt{3}$.

பாதி 7: ஒரு பரவளைவின் மூன்று தொடுகோடுகளால் ஆனையும் மூக்கோளத்தின் குத்துக்கோட்டுச் சத்தி (orthocentre) இலக்கு வரையின் மீதமைவது என நிறுவுக.

பரவளைவு $y^2 = 4ax$ எனவும், அதன்மீது அமைந்துள்ள வரையேற்றம் மூன்று புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்,

$P(at_1^2, 2at_1)$, $Q(at_2^2, 2at_2)$, $R(at_3^2, 2at_3)$ எனவும் கொள்வோம்.



P, Q, R புள்ளிகளிடத்து வரையுங் தொடுகோடுகள் முறையே ML, LN, NM எனக் கொள்வோம்.

ஆகையின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$x l_1 = x + a l_1^2 \quad \dots \quad (1)$$

$$y l_2 = x + a l_2^2 \quad \dots \quad (2)$$

$$y l_3 = x + a l_3^2 \quad \dots \quad (3)$$

∴ L -யின் ஆயத்தொலைகள் $[a l_1 l_2, a(l_1 + l_2)]$

N -யின் ஆயத்தொலைகள் $[a l_2 l_3, a(l_2 + l_3)]$

M -யின் ஆயத்தொலைகள் $[a l_3 l_1, a(l_3 + l_1)]$

MN -க்குச் செங்குத்தாக L வழிச் செல்லுங் LA கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - a(l_1 + l_2) = -l_2[x - a l_1 l_2] \quad \dots \quad (4)$$

LM -க்குச் செங்குத்தாக N வழிச் செல்லுங் NB கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - a(l_2 + l_3) = -l_1[x - a l_2 l_3] \quad \dots \quad (5)$$

இவ்விருண்டு செங்குத்துக் கோடுகள் வெட்டுக் புள்ளி குத்துக் கோட்டுச் சத்தியாகும்.

(5)-இற்குத் (4)-ஐக் கழிப்பின்,

$$a(l_1 + l_2) - a(l_2 + l_3) = l_2[x - a l_1 l_2] - l_1[x - a l_2 l_3]$$

$$(அ - நு) \quad a(l_1 - l_3) = x(l_2 - l_1)$$

$$\therefore \quad x = -a.$$

எனவே, குத்துக் கோட்டுச் சத்தி $x + a = 0$ என்ற சூவக்கு வரையின் விதமையுள்.

சமன்பாடு (4)-இல் $x = -a$ எனப் பிரதியிடுவின்,

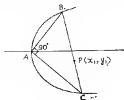
$$y = a(l_1 + l_2 + l_3 + l_1 l_2 l_3).$$

எனவே, குத்துக் கோட்டுச் சத்தியின் ஆயத் தொலைகள்,

$$[-a, a(l_1 + l_2 + l_3 + l_1 l_2 l_3)].$$

மாதிரி 8 : $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் மூலையில் தேர்ச் கோணத்தை ஏற்றும் அதன் தாண்டளவின் தடுப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

$y^2 = 4ax$ பரவளைவின் மூலை A -யில் தேர்ச் கோணத்தை ஏற்றும் தாண்டளவில் ஒன்று BC எனக் கொள்வோம்.



படம் 4B.

BC -இன் தடுப் புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனவும், B, C புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore x_1 = \frac{at_1^2 + at_2^2}{2} \quad \dots \quad (1)$$

$$y_1 = \frac{2at_1 + 2at_2}{2} \quad \dots \quad (2)$$

$$AB \text{ கோட்டின் சரிவு} = \frac{2at_1}{at_1^2} = \frac{2}{t_1}$$

$$AC \text{ கோட்டின் சரிவு} = \frac{2at_2}{at_2^2} = \frac{2}{t_2}$$

AB, AC கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாதலின்,

$$\frac{2}{t_1} \cdot \frac{2}{t_2} = -1 \quad (\text{அ-து}) \quad t_1 t_2 = -4 \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2), (3)-இலிருந்து t_1, t_2 -ஐ நீக்கினால் P -யின் இயங்கு வழி கிடைக்கப் பெறும்.

$$(1)\text{-இலிருந்து } \frac{2x_1}{a} = t_1^2 + t_2^2$$

$$(2)\text{-இலிருந்து } \frac{2y_1}{a} = 2(t_1 + t_2).$$

$$(t_1 + t_2)^2 = t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2$$

$$\therefore \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 = \frac{2x_1}{a} - 8 \quad (\because t_1t_2 = -4)$$

$$(அ - து) \quad y_1^2 = (2x_1 - 8)a$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ -இன் இயங்கு வழி,

$$y^2 = 2a(x - 4a).$$

6-18. $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு t_1 புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு t_2 புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$y = \frac{x}{t_1} + at_1$$

$$\text{தொடுகோட்டின் சரிவு} = \frac{1}{t_1}$$

$$\therefore \text{செங்கோட்டின் சரிவு} = -t_1 \quad [\because m_1m_2 = -1].$$

t_1 புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$y - 2at_1 = -t_1(x - at_1^2)$$

$$(அ - து) \quad xt_1 + y = 2at_1 + at_1^3.$$

எனவே, t_1 புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் (normal) சமன்பாடு,

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3.$$

6-19. செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$$y^2 = 4ax \text{ பரவளைவிற்கு}$$

t_1, t_2 புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள்,

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3 \quad \dots \quad (1)$$

$$y + xt_2 = 2at_2 + at_2^3 \quad \dots \quad (2)$$

(1)-இலிருந்து (2)-ஐக் கழிப்பின்,

$$x(t_1 - t_2) = 2at(t_1 - t_2) + a(t_1^3 - t_2^3)$$

$$(அ-து) \quad x(t_1 - t_2) = 2a(t_1 - t_2) + a(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2)$$

$$\therefore x = 2a + a(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) \quad [\because t_1 - t_2 \neq 0]$$

x-ஐக் மதிப்பை (1)-இல் பிரதியிடுவர்

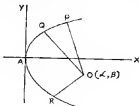
$$y + [2a + a(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2)]t_1 = 2at_1 + at_1^3.$$

$$\therefore y = -a(t_1t_2 + t_2^2)t_1$$

$$= -at_1t_2(t_1 + t_2).$$

எனவே, t_1, t_2 புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $[2a + a(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2), -at_1t_2(t_1 + t_2)]$.

6-20 குறித்த புள்ளி வழி ஒரு பரவளைவுக்கு மூன்று செங்கோடுகள் வரவரக்கூடும்.



படம் 50

குறித்த புள்ளி $O(\alpha, \beta)$ எனவும், இப்புள்ளி வழிசெல்லும் செங்கோட்டின் அடிப்புள்ளி 'A' எனவும் கொள்ளுவோம்.

பரவளைவுக்கு 'A' புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு,

$$y + xt = 2at + at^3 \quad \dots \quad (1)$$

இது $O(\alpha, \beta)$ வழிச் செல்வதாக,

$$\beta + \alpha t = 2at + at^3.$$

$$(அ-து) \quad at^3 + (2a - \alpha)t - \beta = 0 \quad \dots \quad (2)$$

இது 't'-யில் முற்படிச் சமன்பாடாகலின், t-க்கு மூன்று மதிப்புகள் உண்டு. அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் (α, β) வழிச் செல்லும் ஒரு செங்கோடு உண்டு. எனவே, குறித்த புள்ளி வழி மூன்று செங்கோடுகள் பரவளைவிற்கு வரையக்கூடும். இவை மூன்றும் மெய்யானவைகளாகவோ, ஒன்று மெய்யானதாகவும் மற்ற இரண்டும் கற்பனையானவையாகவோ இருக்கும்.

மேலும் (2)-இன் மூலங்கள் t_1, t_2, t_3 எனில்,

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = \frac{2\alpha - \alpha}{\beta} \quad \dots \quad (4)$$

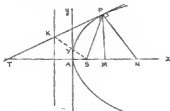
$$t_1 t_2 t_3 = -\frac{\beta}{\beta} \quad \dots \quad (5)$$

6-21. பரவளைவின் பண்புகள் (Properties)

1. $y^2 = 4ax$ பரவளைவில் P புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடும் செங்கோடும் பரவளைவின் அச்ச மூன்றையே T, N புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. A பரவளைவின் மூலம், X ஆவத் திக்கு PM செங்குத்துக்கொண்டெனில்,

$$(i) \quad ST = SN = SP$$

$$(ii) \quad AM = AT.$$



படம் 61

P புள்ளியில் ஆவத்தொலைகள் $(at^2, 2at)$ எனக்கொள்க.

P மீட்டத்துத் தொடுகோடு $yt = x + at^3$.

T புள்ளியில் y ஆவத்தொலை மூச்சியனதையில், $x = -at^3$.

∴ T -இன் ஆயத்தொலைகள் $(-ar^2, 0)$.

P -யிடத்துச் செங்கோடு, $y+x=2ar+ar^2$.

N -புள்ளியின் y ஆயத்தொலை பூச்சியம். ∴ $x=2a+ar^2$.

எனவே, N -வின் ஆயத்தொலைகள் $(2a+ar^2, 0)$.

S புள்ளியின் (முனியம்) ஆயத் தொலைகள் $(a, 0)$.

(i) $TS = TA + AS = ar^2 + a$.

$SN = AN - AS = (2a + ar^2) - a = ar^2 + a$.

$$\begin{aligned} SP &= \sqrt{(ar^2-a)^2 + (2ar)^2} \\ &= \sqrt{a^2r^4 + a^2 - 2a^2r^2 + 4a^2r^2} \\ &= \sqrt{a^2r^4 + 2a^2r^2 + a^2} \\ &= \sqrt{a^2} \{r^4 + 2r^2 + 1\} \\ &= \sqrt{a^2(r^2 + 1)^2} = a(r^2 + 1) = ar^2 + a. \end{aligned}$$

∴ $ST = SN = SP$.

(ii) $AM = P$ -இன் x ஆயத் தொலை $= ar^2$.

$AT = T$ -இன் x ஆயத் தொலை $= -ar^2$,
 $= ar^2$ (எண்ணவது).

∴ $AM = AT$.

2. P புள்ளியிடத்து ஈழையும் தொடுகோடு யாவனவின், முனை A -இடத்து ஈழையும் தொடு கோட்டை Y -இல் சந்திப்பின், SY கோடு PT கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகியிருக்கும்.

மேலும் $SY^2 = AS.SP$. (படம் 51).

$P(ar^2, 2ar)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$y = x + ar^2.$$

Y புள்ளியின் x ஆயத் தொலை பூச்சியம்

∴ Y -இன் ஆயத் தொலைகள் $(0, ar^2)$

$$m_1 = SY \text{ கோட்டின் சரிவு} = \frac{at-0}{0-a} = -t.$$

$$m_2 = PT\text{-இன் சரிவு} = \frac{1}{t}$$

$$m_1 m_2 = (-t) \left(\frac{1}{t} \right) = -1$$

$\therefore SY$ கோடு PT -க்குச் செங்குத்தாகும்.

$$\begin{aligned} \text{மேலும், } SY^2 &= (a-0)^2 + (0-at)^2 \\ &= a^2 + a^2 t^2. \end{aligned}$$

$$AS = S\text{-இன் } x \text{ ஆயத்தொலை} = a.$$

$$SP = a + a^2 \quad [\text{பத்தி 6.21, பண்பு 1}]$$

$$\therefore AS \cdot SP = a \cdot (a + at^2) = a^2 + a^2 t^2.$$

$$\text{எனவே, } SY^2 = AS \cdot SP.$$

3. P புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு இயக்கு வரையை K புள்ளியில் சந்திப்பின்,

$$\angle KSP = 90^\circ. \quad [\text{படம் 51}]$$

$$P \text{ புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு } y = x + at^2.$$

$$\text{இயக்குவரை } x = -a.$$

$\therefore K$ புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்,

$$\left(-a, \frac{at^2 - a}{t} \right)$$

$$S\text{-இன் ஆயத் தொலைகள் } (a, 0)$$

$$P\text{-யின் ஆயத் தொலைகள் } (at^2, 2at)$$

$$m_1 = KS \text{ கோட்டின் சரிவு}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{at^2 - a}{t} - 0 \\ &= \frac{t^2 - 1}{-2t} \end{aligned}$$

$m_2 = SP$ கோட்டின் சரிவு,

$$= \frac{0 - 2at}{a - at^2} = \frac{-2t}{1 - t^2}$$

$$\therefore m_1 m_2 = \left(\frac{t^2 - 1}{-2t} \right) \left(\frac{-2t}{1 - t^2} \right) = -1.$$

எனவே, $\angle KSP = 90^\circ$

4. பரவளைவின் வரைசெய்க்கோட்டை (subnormal) நீளம் ஒரு மாறிலி.

மட்டம் SI -இல் MN வரைசெய்க்கோட்டையாகும்.

$$MN = AN - AM = (2a + at^2) - at^2 = 2a$$

எனவே, வரைசெய்க்கோட்டை ஒரு மாறிலியாகும்.

- 6.22. ஒரு வட்டம் $y^2 = 4ax$ பரவளைவை நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும். அம் புள்ளிகளின் y ஆகத் தொகைகளின் (குத்தாயக்கள்-Ordinates) கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.

$$\text{பரவளைவு } y^2 = 4ax \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{வட்டம் } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (2)$$

வட்டம் பரவளைவை a^2 புள்ளிகளில் வெட்டினால், அம் புள்ளி $(at^2, 2at)$ வட்டத்தின் மேலமைவும்.

$$\therefore (at^2)^2 + (2at)^2 + 2g(at^2) + 2f(2at) + c = 0$$

$$(a - g) a^2 t^4 + 2a(2a + g)t^2 + 4af t + c = 0 \quad \dots \quad (3)$$

இது t -இல் நான்காம் சமன்பாடாகவின் t -க்கு நான்கு மதிப்புகள் உண்டு.

எனவே, வட்டம் பரவளைவை நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும்.

சமன்பாடு (3)-இன் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3, t_4 எனில்.

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$$t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4 = \frac{2g(2a + g)}{a} \dots (5)$$

$$2t_1t_2t_3 = -\frac{4f}{g} \quad \dots \quad (6)$$

$$t_1t_2t_3t_4 = \frac{c}{g^2} \quad \dots \quad (7)$$

சமன்பாடு (4)-இன்குத்து, $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$

$$(அ - ஐ) \quad 2at_1 + 2at_2 + 2at_3 + 2at_4 = 0.$$

எனவே, வெட்டும் புள்ளிகளின் குத்தாயங்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.

மாதிரி 9: $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வாதேனும் இரு புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் P புள்ளியில் செங்கோணத்தில் தம்முள் வெட்டினால், P -யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

$y^2 = 4ax$ பரவளைவிலிருந்து A, B புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் P -யில் வெட்டட்டும். A, B, P புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் முறையே $(at_1^2, 2at_1), (at_2^2, 2at_2), (x_1, y_1)$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore A, B$ புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள்

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^2, \text{ சரிவு} = -t_1$$

$$y + xt_2 = 2at_2 + at_2^2, \text{ சரிவு} = -t_2.$$

இச்செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின்

$$\text{ஆயத்தொலைகள் } [2a + a(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2), -at_1t_2(t_1 + t_2)]$$

$$\therefore x_1 = 2a + a(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) \quad \dots \quad (1)$$

$$y_1 = -at_1t_2(t_1 + t_2) \quad \dots \quad (2)$$

செங்கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாதலின்,

$$(-t_1)(-t_2) = -1$$

$$(அ - ஐ) \quad t_1t_2 = -1 \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2), (3)-இன்குத்து t_1, t_2 -ஐ நீக்கின் $P(x_1, y_1)$ -இன் இயங்கு வழி கிடைக்கப்பெறும்.

$$(1) \text{ இவ்வுருத்து } \frac{x_1 - 2}{a} = t_1^2 + t_2^2 - 1 \quad [\because t_1 t_2 = -1]$$

$$(2) \text{ இவ்வுருத்து } \frac{y_1}{a} = (t_1 + t_2)$$

$$(t_1 + t_2)^2 = t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 = t_1^2 + t_2^2 - 2$$

$$(அ - 2) \quad \frac{y_1^2}{a^2} = \frac{x_1 - 2a}{a} - 1$$

$$\therefore \frac{y_1^2}{a^2} = \frac{x_1 - 3a}{a}$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ -இல் இவ்வுருத்து

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{x - 3a}{a}$$

$$(அ - 2) \quad y^2 = a(x - 3a).$$

மேலும் 10: $A(t_1)$ புள்ளியிலிருந்து பரவணவுக்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள பரவணவை மறுபடியும் $B(t_2)$ புள்ளியில் தொடங்கும்,

$$t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1} \text{ என நினைவு.}$$

AB தாண்டின் சமன்பாடு,

$$y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1 t_2 \quad \dots \quad (1)$$

$A(t_1)$ புள்ளியிலிருந்து செங்கோட்டு,

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3 \quad \dots \quad (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும் ஆகையால்,

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{2}{t_1} = \frac{2at_1 t_2}{2at_1 + at_1^3}$$

முதலில் விவரிக்கப்படுகிறது,

$$t_1 + t_2 = -\frac{2}{t_1}$$

$$\therefore t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$$

ம. வ. - 13

மாதிரி 11: P புள்ளியிலிருந்து $y^0 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரைவும் மூன்று செங்கோடுகள் பரவளைவின் அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் தம் x ஆயத்தொலைகள் கூட்டுத் தொடரிக் (arithmetic progression) இருப்பின், P -யின் இயங்கு வழிக் காண்க. இப்புள்ளிகளாகி அவையும் மூக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி பரவளைவின் அச்சின் மீதமையும் என நிறுவுக.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $y^0 = 4ax$ பரவளைவுக்கும் வரைவும் செங்கோடுகள்தம் ஆடிப்புள்ளிகளை,

$$ax^2 + (2a - x_1)x - y_1 = 0 \quad [\text{மத்தி } 8 \cdot 20\text{-சமன்பாடு (2)}]$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து அறிவலாம்.

ஆடிப் புள்ளிகள் ' t_1 ', ' t_2 ', ' t_3 ' எனில்,

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = \frac{2a - x_1}{a} \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$t_1 t_2 t_3 = \frac{y_1}{a} \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

t_1, t_2, t_3 புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள்,

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^2$$

$$y + xt_2 = 2at_2 + at_2^2$$

$$y + xt_3 = 2at_3 + at_3^2.$$

இவைகள் பரவளைவின் அச்சை மூன்றாமே L, M, N புள்ளிகளில் வெட்டுவதாகக் கொள்வோம்.

பரவளைவின் அச்ச x ஆயமானதன் L, M, N புள்ளிகளின் y ஆயத்தொலைகள் பூச்சியம். எனவே, L, M, N புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் மூன்றாமே $[2a + at_1^2, 0]$, $[2a + at_2^2, 0]$, $[2a + at_3^2, 0]$.

இவைகள் கூட்டுவருத்திலிருப்பின்,

$$2a + at_3^2 = \frac{(2a + at_1^2) + (2a + at_2^2)}{2}$$

$$(அ-து) \quad 4a + 2at_3^2 = 4a + at_1^2 + at_3^2$$

$$(அ-து) \quad 2t_3^2 = t_1^2 + t_3^2 \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \therefore 3t_3^2 &= t_1^2 + t_3^2 + t_3^2 \\ &= (t_1 + t_3 + t_3)^2 - 2(t_1t_3 + t_1t_3 + t_3t_3) \\ &= -\frac{2(2a-x_1)}{a} \quad \dots \quad \dots \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{மேலும், } t_2 = -(t_1 + t_3) \quad [\because \text{சமன்பாடு (1)}]$$

$$\begin{aligned} \therefore t_2^2 &= (t_1 + t_3)^2 \\ &= t_1^2 + t_3^2 + 2t_1t_3 \\ &= 2t_3^2 + 2t_1t_3 \quad [\because \text{சமன்பாடு (4)}] \end{aligned}$$

$$\therefore -t_3^2 = 2t_1t_3 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

$$\text{சமன்பாடு (6)-இலிருந்து } t_1t_3 = \left(\frac{y_1}{at_2} \right)$$

$$\text{ஆனால் சமன்பாடு (6)-இலிருந்து } t_1t_3 = -\frac{t_3^2}{2}$$

$$\therefore \frac{2y_1}{a} = -t_3^2 \quad \dots \quad = \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

$$(6)\text{-இலிருந்து } 27t_3^2 = \frac{-8(2a-x_1)^2}{a^3}$$

$$(7)\text{-இலிருந்து } t_2^2 = \frac{4y_1^2}{a^2}$$

$$\therefore \frac{4y_1^2}{a^2} = \frac{-8(2a-x_1)^2}{27a^3}$$

$$(அ-து) \quad 27ay_1^2 = 8(x_1 - 2a)^2.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ -இல் இயங்கு கடி,

$$27ay^2 = 2(x-2a)^2.$$

மீண்டும், t_1, t_2, t_3 புள்ளிகளாலமையத் முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சத்தி (x_0, y_0) எனில்,

$$x_0 = \frac{at_1^2 + at_2^2 + at_3^2}{8} = \frac{a}{8}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)$$

$$y_0 = \frac{2at_1 + 2at_2 + 2at_3}{8} = \frac{2a}{8}(t_1 + t_2 + t_3) \\ = 0. \quad [\because t_1 + t_2 + t_3 = 0].$$

எனவே, மையக் கோட்டுச் சத்தியின் ஆயத் தொலைவுகள்,

$$\left[-\frac{a}{8}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2), 0 \right].$$

(அ - து) மையக் கோட்டுச் சத்தியின் y ஆயத் தொலைபூச்சியம், எனவே, மையக் கோட்டுச் சத்தி அச்சின் x ஆயம்) மீதமையம்.

மாடு 12 : பரவளைவுக்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் மூன்று செங்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகளின் y ஆயத்தொலைவுகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் என நிறுவுக. அடிப்புள்ளிகள் இரண்டிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையா செங்கோடுகள் பரவளைவின்மீது மீறும் வெட்டுவதற்குத் தேவைபாண கட்டுப்பாடு காண்க.

(α, β) புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள்

$$at^2 + (2a - \alpha)t - \beta = 0 \quad \dots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டின்படி கிடைக்கப்பெறும்.

$$\therefore t_1 + t_2 + t_3 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = \frac{2a - \alpha}{a} \quad \dots \quad (3)$$

$$t_1 t_2 t_3 = \frac{\beta}{a} \quad \dots \quad (4)$$

$$(2)\text{-இலிருந்து } t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

$$\therefore 2at_1 + 2at_2 + 2at_3 = 0$$

எனவே, அடிப்புள்ளிகள்தம் y ஆயத்தொலைகளின் கூட்டுத் தொகை மூச்சியமாகும்.

மேலும் t_1, t_2 என்ற அடிப்புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் t_3 புள்ளியில் பரவரிசையின்மீது தம்முள் வெட்டும் எனக் கொள்வோம்.

எனவே, t_1, t_2, t_3 புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (at_1^2, at_2^2, at_3^2) புள்ளியில் வெட்டுகின்றன.

$$\therefore \text{சமன்பாடு (4)-இலிருந்து } t_1 t_2 t_3 = \frac{9at^2}{a}$$

$$(அ - து) \quad t_1 t_2 = 2,$$

$$\text{எனவே, தேவையான கூட்டுப்பாடு } t_1 t_2 = 2.$$

மாதிரி 15 : $y^2 = 4ax$ பரவரிசைவுக்கும் புறத்தேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அய்வரிசைவுக்கு வரைபடப்படும் செங்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம், பரவரிசையின் மூலையிற் செல்லும் என நிறுவுக.

செங்கோடுகளினிற் அடிப்புள்ளிகள் t_1, t_2, t_3 எனக்கொள்வோமெனில்,

பத்தி 8-20-சமன்பாடு (3)-இன் படி,

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (1)$$

t_1, t_2, t_3 புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டம் பரவரிசையை t_4 புள்ளியில் வெட்டுகிறது எனில்,

பத்தி 8-22-சமன்பாடு (4)-இன் படி,

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (2)$$

$$\therefore t_4 = 0.$$

$$(அ - து) \quad t_4 \text{ புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் } (0, 0).$$

எனவே, வட்டம் பரவரிசையின் மூலையிற் செல்லும்.

மாதிரி 16 : P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டடி (subtangent) நீளம் P புள்ளியின் x ஆயத்தொலைவின் இரு மடங்கு என நிறுவுக.

படம் 5 I-இல் TN தொடுகோட்டடியாகும். $P(af^2, 2af)$ புள்ளியைத் தொடுகோடு.

$$y^2 = x + at^2$$

T புள்ளியின் y ஆயத்தொலைவு முச்சியைத் தவிர

T -யின் ஆயத்தொலைகள் $(-at^2, 0)$.

$$TN = TA + AN = at^2 + at^2 = 2af^2$$

எனவே, தொடுகோட்டடி P புள்ளியின் x ஆயத்தொலைவின் இரு மடங்காகும். மேலும் முனைவிடத்து இத்தொடுகோட்டடி TN இது சமனாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

பாதி 15: $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு P புள்ளியிலிருந்து வரையும் செங்கோடுகளில் இரண்டு x ஆயத்துடன் நிரப்புக் கோணங்கள் (complementary angles) திறப்பிக்குமெனின், P -யின் இயங்கு வரிக் காண்க.

P புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் செங்கோடுகள்,

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3 \quad \dots \quad (1)$$

$$y + xt_2 = 2at_2 + at_2^3 \quad \dots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

இவைகளீரண்டும் வெட்டும் புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனின்,

$$x_1 = 2a + a(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) \quad (3)$$

$$y_1 = -at_1 t_2 (t_1 + t_2) \quad \dots \quad (4)$$

இச் செங்கோடுகளில் ஒன்று x ஆயத்துடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் θ எனின், மற்றது $(90 - \theta)$ கோணத்தைப் திறப்பிக்கும். எனவே, அவைகளின் சரிவு முறையே $\tan \theta$, $\tan(90 - \theta)$ ஆகும். சரிவுகளின் பெருக்குத்தொகை $\tan \theta$, $\tan(90 - \theta) = 1$. சமன் பாடுகள் (1), (2)-இலிருந்து செங்கோடுகளின் சரிவுகள் $-t_1$, $-t_2$ ஆகனின், சரிவுகளின் பெருக்குத் தொகை $t_1 t_2$ ஆகும்.

எனவே, $t_1 t_2 = 1$.

சமன் பாடு (3)-இலிருந்து, $\frac{x_1 - 2a}{a} = t_1^2 + t_2^2 + t_1 t_2$.

$$\text{சமன்பாடு (4)-இலிருந்து, } \frac{-y_1}{a} = t_1 t_2 (t_1 + t_2).$$

$$(\text{அ} + \text{ஆ}) \quad \frac{x_1 - 2a}{a} = t_1^2 + t_2^2 + 1, \quad (\because t_1 t_2 = 1).$$

$$\frac{-y_1}{a} = t_1 + t_2$$

$$\begin{aligned} (t_1 + t_2)^2 &= t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \\ &= t_1^2 + t_2^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{-y_1}{a} \right)^2 = \frac{x_1 - 2a}{a} + 1$$

$$(\text{அ} + \text{ஆ}) \quad \frac{y_1^2}{a^2} = \frac{x_1 - 2a}{a} + 1$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ -இன் இவற்று வழி,

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{x-a}{a}$$

$$(\text{அ} + \text{ஆ}) \quad y^2 = a(x-a).$$

பாதி 10 : $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4by$ பரவளைவுகளில் பொதுத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

பொதுத் தொடுகோடு $y = mx + c$ எனக் கொள்வோம்.

$y = mx + c$ கோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்குத் தொடு கோட்டெனில், $c = \frac{a}{m}$.

இக் கோடு $x^2 = 4by$ பரவளைவுக்கும் தொடு கோட்டெனில், கோடுபீ. இப் பரவளைவு வளைக்கும் புள்ளிகள் பொருத்தும் புள்ளிகளாகும்.

$$(\text{அ} + \text{ஆ}) \quad x^2 = 4by = 4b[mx + c] = 4b \left[mx + \frac{a}{m} \right]$$

$$(\text{அ} + \text{ஆ}) \quad mx^2 - 4bm^2x - 4ab = 0$$

சமன்பாட்டில் x -இன் இரு மதிப்புகளும் சமம்.

$$\therefore 16b^2m^4 + 16bm = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad b^2m^3 = -m. \quad \therefore m = -\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$m = -\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad c = \frac{a}{m} = -a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ எனப் பிரதிபலி}$$

$$y = mx + c \text{ சமன்பாடு.}$$

$$y = -\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}x - a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \text{ பொதுத் தொடுகோடு } a^{\frac{1}{2}}x + b^{\frac{1}{2}}y + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = 0.$$

பயிற்சி 6.1.

1. கீழ்க்காணும் பரவளைவுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) குவியம் $(3, 4)$, இயக்குவரை $2x - 3y + 5 = 0$.

(ii) குவியம் $(-1, -1)$, இயக்குவரை $2x - 3y + 6 = 0$.

(iii) குவியம் (a, b) , இயக்குவரை $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

2. கீழ்க்காணும் பரவளைவுகளின் மூலம், குவியம், இயக்குவரை, அச்ச முதலியவைகளைக் காண்க.

(i) $x^2 - 4x - 5y - 7 = 0$

(ii) $x^2 - 2ax + 2ay = 0$.

(iii) $(x-1)^2 + (y-8)^2 = \left(\frac{x-y-1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

3. P புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் இடைவெறுகள் கோணம் மாறிலி α எனின், P -யின் இயங்குவழிக் காண்க. $\alpha = 90^\circ$ எனின், இயங்குவழி என்ன?

4. பரவளைவின் இரு தொடுகோடுகள் செங்குகத்தின் நீட்டலில் வெட்டிக் கொண்டால், அத்தொடுகோடுகள் பரவளைவு அச்சுடன் நிரப்புக் கோணங்கள் சிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.
5. $x^2 + y^2 = 2a^2$, $y^2 = 5ax$ பரவளைவுகளின் பொதுத் தொடுகோடு $y = \pm (x + 2a)$ என நிறுவுக.
6. $y^2 = 64x$ பரவளைவு, $4y = 3x - 48$ கோட்டில் ஏற்கும் தாளின் நீளம் என்ன? இத்தன் பரவளைவின் மூலையிடத்து ஏற்கும் கோணம் யாது?
7. P புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகள் இயக்குவரையில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டின் நீளம் d (ஒரு மாநிலி) எனின், P -யின் இயங்கு வழிக் காண்க.
8. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் குவிய தாண்டளில் ஒன்றின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) , (x_2, y_2) எனின் $x_1x_2 = a^2$, $y_1y_2 = -4a^2$ என நிறுவுக.
9. ஒரு பரவளைவின் உள் வரையப்பட்ட நான்குதலின் (inscribed quadrilateral) மூன்று பக்கங்கள் பரவளைவு அச்சில் மீதுள்ள நிலைத்த புள்ளிகள் வழிச் செல்வன, தாண்டாவது பக்கமும் அச்சில் மீதுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளிவழிச் செல்லும் என நிறுவுக.
10. P புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகள் T ஆயத்துடன் ஏற்படுத்தும் மூக்கோணத்தின் பரப்பு c^2 (மாநிலி) எனின், P -யின் இயங்கு வழிக் காண்க.
11. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் மூலையிடத்து 45° கோணம் ஏற்கும் தாண்டளுக்கு ஆதிவிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளும் அடிப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.
12. $y^2 = 4ax$ பரவளைவிக்கு P, Q புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள், $R(r)$ புள்ளியில் சந்திக்குமெனின், PQ தாளில் சமன்பாடு $yt + 2(x + 2a) = 0$ என நிறுவுக.
13. $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு, பரவளைவு அச்சுடன் d கோணம் சிறப்பிக்கிறது. இக்

கோடு பரவளைவை மீண்டும் β கோணத்தில் சத்தப்பிவிட, $180^\circ - 2\beta$ β என திறவுக.

14. PQ என்பது $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் குவிய நான். P, Q புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளைவை மீண்டும் P', Q' புள்ளிகளில் வெட்டினும், $P'Q'$ என்ற நான் PQ நானிற்கு இணை என திறவுக.

15. $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு t_1, t_2, t_3 புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகளாக அமைவும் முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}a^3(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 + t_2 - t_3)^2$ என திறவுக.

16. $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு பரவளைவை மீண்டும் Q -யில் வெட்டும் பரவளைவின் குவியம் S எனில், PSQ முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சத்தியின் இயங்கு வழித் தானாக.

17. $1x + 1y = 1$ கோடு, $y^2 = 4ax$ பரவளைவை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. பரவளைவின் மீதுள்ள R புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{4am^2}{P}, \frac{4am}{I}\right)$ எனில், இம் மூன்று புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் என திறவுக.

18. பரவளைவின் குவியநானின் துளிகளிடத்து மையம் தொடுகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழித் தானாக.

19. $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு $P(t)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டில், குவியம் S, P புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் ஏற்கும் தானின் தீனம் யாது?

20. $P(2, 4)$ புள்ளியிடத்து $y^2 = 3x$ பரவளைவுக்கு மையம் செங்கோடு பரவளைவை மீண்டும் $Q(18, -12)$ புள்ளியில் சத்திக்கும் என திறவுக. PQ கோட்டின் தீனம் காண்க.

21. PQ என்ற ஒரு செங்கோட்டு நான் பரவளைவின் மூலையிடத்து ஏற்கும் கோணம் 90° எனில், இத்தான் பரவளை

யின் அச்சுடன் மீறப்பிக்கும் கோணம் $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ என நிறுவுக.

22. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ -இன் இரண்டு செங்கோடுகள் தம்முள் P புள்ளியில் செங்கோணத்தில் வெட்டுமெனின், P -யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

23. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடுகோட்டிற்கு ஒரு திசைத் துள்ளியிலிருந்து வரையடி செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

24. P புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் மூன்று செங்கோடுகளில் இரண்டு பொருத்தும் கோடு மெனெனில், P -யின் இயங்கு வழி $27ay^3 = 4(x-2a)^3$ என நிறுவுக.

25. பரவளைவின் மீதுள்ள L, M, N புள்ளிகளின் சூத்திரங்கள் பெருக்கு விருத்தியிலிருப்பின், (geometric progression) L, N புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் M புள்ளியின் சூத்திரக் கோட்டின் (ordinate) மீது வெட்டும் என நிறுவுக.

26. P புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டு நான் பரவளைவின் குவிபத்தின் ஏதற்கும் கோணம் 90° எனில், P புள்ளியின் ஆவத்தொலைகள் சமம் என நிறுவுக.

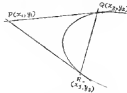
27. $y = mx + c$ எனும் கோடு $y^2 = 4a(x+a)$ பரவளைவின் தொடுகோடுகளில் $c = \frac{a(1+m^2)}{m}$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. (i) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 26x - 74y + 900 = 0$; (ii) $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 2x + 62y - 10 = 0$; (iii) $(ax-by)^2 - 2a^2x - 2b^2y + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$.
2. (i) $(2, -1)$, $(2, \frac{1}{4})$, $4y+9=0$, $x=2$; (ii) $(a, \frac{a}{2})$, $(a, 0)$, $y=a$, $x=a$; (iii) $(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, $(1, 2)$, $(x+y-1=0)$.
3. $y^2 - 4ax = (x+a)^2 \tan^2 \alpha$; $x+a=0$.
6. $(-\frac{840}{9})$; $\tan^{-1}(\frac{20}{9})$.

7. $(y^2 - 4ax)(x + a)^2 = a^3x^2$, 10. $x^2(y^2 - 4ax) = 4c^4$,
 11. $(x^2 + y^2 - 4ax)^2 = 16a(x^2 + xy^2 + ay^2)$, 12. $y^3(81y^2 + 160a^2 - 108ax) + 128a^4 = 0$, 13. $y^2 = a(x - 8a)$,
 14. $a\sqrt{1 + t^2}$, 15. $16\sqrt{2}$, 16. $y^2 = a(x - 8a)$.

8-23. $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடுதளம்



படம் 8B.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடு புள்ளிகள் $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ எனக் கொள்வோம்.

$Q(x_2, y_2)$ புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு,

$$yy_2 = 2a(x + x_2) \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore y_1y_2 = 2a(x_1 + x_2) \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$R(x_3, y_3)$ புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு,

$$yy_3 = 2a(x + x_3) \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore y_1y_3 + 2a(x_1 + x_3) \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

கேள் : பரவளைவின் குவியத்தின் $(a, 0)$, $y^2 = 4ax$ பரவளைவைச் சார்ந்த இசைக்கோடு,

$$y(0) = 2a(x+a)$$

$$(அ - ஐ) \quad x + a = 0$$

எனவே, குவியத்தின் இசைக்கோடு அதன் இயக்குவதையாகும்.

6-25. $lx + my + n = 0$ கோட்டின் $y^2 = 4ax$ பரவளைவைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளி காணல்

$$lx + my + n = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{என்ற கோட்டின் } y^2 = 4ax \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

பரவளைவைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்,

(x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு,

$$yy_1 = 2a(x + x_1)$$

$$(அ - ஐ) \quad yy_1 = 2ax + 2ax_1 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (3) ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{l}{-2a} = \frac{m}{y_1} = \frac{n}{-2ax_1}$$

$$\text{எனவே, } x_1 = \frac{n}{l}, \quad y_1 = \frac{-2am}{l}$$

$\therefore \quad lx + my + n = 0$ -த்தின் $y^2 = 4ax$ பரவளைவைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளி $\left(\frac{n}{l}, \frac{-2am}{l}\right)$.

6-26. $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு $Q(x_2, y_2)$ புள்ளியின் செல்லின், Q -வின் இசைக்கோடு P வழிச் செல்லும்

$y^2 = 4ax$ பரவளைவைச் சார்ந்த $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு, $yy_1 = 2a(x + x_1) \quad \dots \quad \dots \quad (1)$

இது $Q(x_2, y_2)$ வழிச் செல்லும்.

$$\therefore \quad y_2y_1 = 2a(x_2 + x_1) \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடு (3)-இலிருந்து $Q(x_2, y_2)$ புள்ளியின் இசைக் கோடு,

$$yy_2 = 2a(x + x_2)$$

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்கிறது என அறியலாம்.

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ புள்ளிகள் $y^2 = 4ax$ பரவளைவைச் சார்ந்த துணையியல் புள்ளிகள் எனப்படும்.

6-27. $l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ கோடுகள் துணையியல் கோடுகளாக இருப்பதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$y^2 = 4ax$ பரவளைவைச் சார்ந்த $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ கோட்டின் இசைப் புள்ளி (x_1, y_1) எனில்,

$$\text{பத்தி 6-28 படி } x_1 = -\frac{n_1}{l_1}, y_1 = -\frac{2am_1}{l_1}$$

வரையறைப்படி இப் புள்ளி $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ கோட்டின் வீதனையும்.

$$\therefore l_2 \left(\frac{n_1}{l_1} \right) + m_2 \left(\frac{-2am_1}{l_1} \right) + n_2 = 0.$$

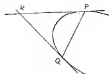
$$(\text{அ} - \text{து}) \quad n_1 l_2 + n_2 l_1 = 2am_1 m_2.$$

குறிப்பு: வாதேனும் இரு புள்ளிகளில் பரவளைவைச் சார்ந்த ஒரு புள்ளியின் இசைக் கோடு மற்றதன் வழிச் செல்வின் அப் புள்ளிகள் துணையியல் புள்ளிகள் (conjugate points) எனப்படும்.

வாதேனும் இரு கோடுகளில் பரவளைவைச் சார்ந்த ஒரு கோட்டின் இசைப் புள்ளி மற்றதன்மேல் அமைவதுமெனில், அவ்விரு கோடுகளும் இசைக் கோடுகள் எனப்படும்.

மாதிரி 17: $y^2 = 4ax$ பரவளைவில் 21 தளமுள்ள தானின் அங் வளைவைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளியின் இவ்வுரு வழிக் காண்க.

பரவளைவில் PQ தானின் தீளம் 21 எனக் கொள்வோம்.



படம் 54.

$P(t_1)$, $Q(t_2)$ எனில்,

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (at_1^3 - at_2^3)^2 + (2at_1 - 2at_2)^2 \\ &= a^2(t_1^3 - t_2^3)^2 - 4a^2(t_1 - t_2)^2 \end{aligned}$$

$PQ = 2a$ ஆகலின்,

$$\begin{aligned} 4a^2 &= a^2(t_1^3 - t_2^3)^2 + 4a^2(t_1 - t_2)^2 \\ &= a^2(t_1 - t_2)^2[(t_1 + t_2)^2 + 4] \quad \dots (1) \end{aligned}$$

PQ அளவிக் இயைபிலுள்ள $R(x_1y_1)$ எனக் கொண்டால், P , Q புள்ளிகளிடத்து வரையற் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி R ஆகும்.

$P(t_1)$ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடு,

$$y_1 = x + at_1^3$$

$Q(t_2)$ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடு,

$$y_2 = x + at_2^3.$$

இத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $[(at_1t_2, a(t_1 + t_2))]$

$$\therefore x_1 = at_1t_2$$

$$y_1 = a(t_1 + t_2).$$

$$(அ-ஆ) \quad \frac{x_1}{a} = t_1t_2 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\frac{y_1}{a} = t_1 + t_2 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$\begin{aligned}(t_1 - t_2)^2 &= (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 \\ &= \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{4x_1}{a} = \frac{y_1^2 - 4ax_1}{a^2} \quad \dots \quad (4)\end{aligned}$$

(3), (4)-ஐ, (1)-இல் பிரதிபலிக்கும்,

$$4l^2 = a^2 \left[\frac{y_1^2 - 4ax_1}{a^2} \right] \left[\frac{y_1^2}{a^2} + 4 \right]$$

$$(அ - ஆ) \quad 4l^2 a^2 = (y_1^2 - 4ax_1)(y_1^2 + 4a^2),$$

எனவே, இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) -இன் இயங்கு வழி

$$4a^2 l^2 = (y^2 - 4ax)(y^2 + 4a^2).$$

பாதி 18: $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடுகோடுகளின் $y^2 = 4cx$ பரவளைவைச் சாத்த இசைப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

$y^2 = 4cx$ -ஐச் சாத்த $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடுகோட்கள் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக்கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு,

$$yy_1 = 2c(x + x_1)$$

$$y = \frac{2cx}{y_1} + \frac{2cx_1}{y_1} \quad \dots \quad (1)$$

இது, $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடுகோட்டெனின்,

$$\frac{2cx_1}{y_1} = \frac{a}{\frac{2c}{y_1}}, \quad \left[\because c = \frac{a}{m} \right].$$

$$(அ-ஆ) \quad 4c^2 x_1 = ay_1^2$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

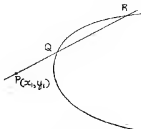
$$ay^2 = 4c^2 x,$$

6-28. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் இடக்கூடத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x - x_1}{\cos \theta} = \frac{y - y_1}{\sin \theta} = r \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.



படம் 68

இக் கோட்டின் மீதுள்ள வாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta)$.

இக் கோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவைச் சத்திக்கும் இடங்களில்,

$$(y_1 + r \sin \theta)^2 = 4a(x_1 + r \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \text{(அ - ஐ)} \quad r^2 \sin^2 \theta + 2(y_1 \sin \theta - 2a \cos \theta)r \\ + y_1^2 - 4ax_1 = 0 \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

இது r -இல் இருபடிச் சமன்பாடு. இதன் இரு மதிப்புகள் r_1, r_2 எனில், அவைகள் P புள்ளியிலிருந்து இக் கோடு பரவளைவை மொட்டும் Q, R புள்ளிகளின் தூரத்தைக் கொடுக்கும்.

இக் கோடு தொடுகோடுகளில், $PQ = PR$.

$$\text{(அ - ஐ)} \quad r_1 = r_2$$

எனவே, சமன்பாடு (2)-இல் தீர்வுகள் சமம்.

$$\therefore 4(y_1 \sin \theta - 2a \cos \theta)^2 - 4 \sin^2 \theta (y_1^2 - 4ax_1) = 0$$

$$(அ-து) (y_1 \sin \theta - 2a \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta (y_1^2 - 4ax_1) \dots (3)$$

$$(1)-இலிருந்து $\frac{x-x_1}{r} = \cos \theta$$$

$$\frac{y-y_1}{r} = \sin \theta.$$

$$r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2.$$

இம் மதிப்புகளை (3)-இல் பிரதியிடுவர்,

$$\left[y_1 \frac{(y-y_1)}{r} - 2a \frac{x-x_1}{r} \right]^2 - \left(\frac{y-y_1}{r} \right)^2 (y_1^2 - 4ax_1)$$

$$(அ-து) (y-y_1)y_1 - 2a(x-x_1)^2 = (y-y_1)^2 (y_1^2 - 4ax_1),$$

$$(ஆ-து) [(yy_1 - 2ax) - (y_1^2 - 2ax_1)]^2 = (y^2 + y_1^2 - 2yy_1) (y_1^2 - 4ax_1)$$

$$(அ-து) [\{ yy_1 - 2a(x+x_1) \} - \{ y_1^2 - 4ax_1 \}]^2 = (y_1^2 - 4ax_1) [\{ y^2 - 4ax \} + \{ y_1^2 - 4ax_1 \} - 2 \{ yy_1 - 2a(x+x_1) \}] \dots \dots (4)$$

$$S = y^2 - 4ax$$

$$S_1 = y_1^2 - 4ax_1$$

$$T = yy_1 - 2a(x+x_1) \text{ எனில்,}$$

$$\text{சமன்பாடு (4), } (T-S_1)^2 = S_1[S+S_1-2T] \text{ என்றாகும்.}$$

$$\therefore T^2 + S_1^2 - 2TS_1 = SS_1 + S_1^2 - 2TS_1.$$

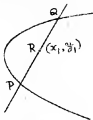
$$(அ-து) T^2 = SS_1.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவரைவுக்கு வரையில் இரட்டைத் தொடுகோடுகள்,

$$T^2 = SS_1.$$

$$(அ-து) [yy_1 - 2a(x+x_1)]^2 = (y^2 - 4ax)(y_1^2 - 4ax_1).$$

6-29. $y^2 = 4ax$ பரவளையில் (x_1, y_1) இ தடும் புள்ளியாகக் கொண்ட தாணின் சமன்பாடு



படம் 66.

பரவளைவு $y^2 = 4ax$,

தான் PQ எனவும், $R(x_1, y_1)$ தாணின் தடும்புள்ளி எனவும் கொள்ளோம்.

(x_1, y_1) புள்ளி வழிக் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x - x_1}{\cos \theta} = \frac{y - y_1}{\sin \theta} = r \quad \dots \quad (1)$$

எனில், இக்கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta)$.

இக்கோடு பரவளைவை வெட்டும் புள்ளிகளில்,

$$(y_1 + r \sin \theta)^2 = 4a(x_1 + r \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad r^2 \sin^2 \theta + 2(y_1 \sin \theta - 2a \cos \theta)r \\ + y_1^2 - 4ax_1 = 0 \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

இது r -இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின் இதன் இரு மதிப்புகள் r_1, r_2 என்பவை $R(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q -வின் தூரங்களைக் கொடுக்கும்.

R புள்ளி, PQ -வின் தடும்புள்ளியாதலின்,

$$r_1 = -r_2$$

$$\text{(அ-து)} \quad r_1 + r_2 = 0.$$

∴ சமன்பாடு (2)-இன் தீர்வுகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம்.

$$\therefore y_1 \sin \theta - 2a \cos \theta = 0 \quad \dots \quad (3)$$

(1)-இலிருந்து,

$$\cos \theta = \frac{x-x_1}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y-y_1}{r}$$

இதை (3)-இல் பிரதிபலித்து,

$$\frac{y_1(y-y_1)}{r} - 2a \frac{x-x_1}{r} = 0$$

$$(அ. ௨) \quad (y-y_1)y_1 - 2a(x-x_1) = 0$$

$$\therefore yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$$

இரு பக்கமும் $-2ax_1$ -ஐக் கூட்டினால்

$$yy_1 - 2a(x-x_1) = y_1^2 - 4ax_1$$

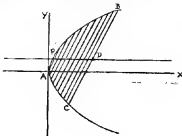
$$S = y^2 - 4ax$$

$$S_1 = y_1^2 - 4ax_1$$

$$T = yy_1 - 2a(x+x_1) \text{ எனில்,}$$

நானின் சமன்பாடு $T = S_1$ என்றாகும்.

5.30. பரவளையின் இணை நாணகந்தம் (Parallel chords) தரும் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி பரவளைவு அச்சுக்கு இணைமாகச் செல்லும் நேர்க்கோடாகும்.



படம் 57

கோடுகள் அடங்கியும் ஒன்றுக்கொன்று இணையாதவின் அமைவுகள் x ஆயத்தின் திறப்பிக்குள் கோணம் சமமாகும். எனவே, சரிவுகள் சமமாகும்.

சரிவு m எனில், இணை கோடுகளில் யாதேனும் ஒன்றின் சமன்பாடு,

$$y = mx + c \quad \dots \dots \dots (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

BC என்ற இணை கோட்டின் தடுப்புள்ளி $D(x_1, y_1)$ எனில்,

BC நாளின் சமன்பாடு, $yy_1 - 2mx + x_1 = y_1^2 - 4mx_1$

$$(அ - ஐ) \quad yy_1 - 2mx = y_1^2 - 2mx_1 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\therefore BC\text{-யின் சரிவு} = \frac{2m}{y_1}$$

BC கோடு, $y = mx + c$ கோட்டிற்கு இணையாதவின்.

$$m = \frac{2m}{y_1}$$

$$(அ - ஐ) \quad y_1 = \frac{2m}{m},$$

எனவே, $D(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி,

$$y = \frac{2m}{m}.$$

இது x ஆயத்திற்கு இணையான ஒரு நேர்க்கோடாகும்.

எனவே, இணை நாள்களின் தடுப்புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழி பரவணவின் அச்சுக்கு (x ஆயம்) இணையாக உள்ள ஒரு நேர்க்கோடாகும்.

மேலும், D -யின் இயங்கு வழி பரவணவை P புள்ளியில் வெட்டினால், P புள்ளியின் y ஆயத் தொகை $\frac{2m}{m}$.

∴ P -யின் ஆயத் தொலைவுகள்,

$$\left(\frac{\sigma}{m^2}, \frac{2\sigma}{m} \right).$$

$$\left[\because x = \frac{y^2}{4a} = \frac{4a^2}{m^2 4a} = \frac{\sigma}{m^2} \right]$$

பரவளைவுக்கு P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$y - \frac{2\sigma}{m} = 2a \left(x + \frac{\sigma}{m^2} \right)$$

$$(அ - து) \quad y = mx + \frac{\sigma}{m}.$$

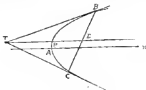
இதன் சரிவு m ஆகலின், P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு இணைநாண்டுகளுக்கு இணையாக உள்ள நேர்க்கோடாகும்.

6-31. பரவளைவின் விட்டம் (Diameter) வகையகத.

பரவளைவின் இணை நாண்டுகளும் நடுப்புள்ளிகளின் இயக்கு வழி பரவளைவின் விட்டம் எனப்படும். படம் 57-இல் PD பரவளைவின் விட்டமாகும். இது x ஆயத்திற்கு (பரவளைவு அச்ச) இணைபாக இருக்கும். பரவளைவின் விட்டங்கள் வரவும் அதன் அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்.

6-32. பரவளைவு நாணின் துளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள், அத்தனை இரு சுமமாகப் பிக்கும் பரவளைவு விட்டத்தின் மேல் தம்முள் வெட்டும்.

நாண் BC -யின் நடுப்புள்ளி D எனக் கொள்வோம். பரவளைவு அச்சுக்கு இணையாக D வழி வரவரும் கோடு பரவளைவை P புள்ளியில் வெட்டப்படும்.



படம் 58

B, C புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் $(at_1^2, 2at_1), (at_2^2, 2at_2)$ எனக் கொள்வோம்.

$$PD \text{ கோட்டின் சமன்பாடு } y = \frac{2at_1 + 2at_2}{2} = a(t_1 + t_2)$$

$$(அ = து) \quad y = a(t_1 + t_2)$$

B, C புள்ளிகளிடத்துப் பரவளைவு $y^2 = 4ax$ -க்கு வரையம் தொடுகோடுகள்

$$yt_1 = x + at_1^2$$

$$yt_2 = x + at_2^2.$$

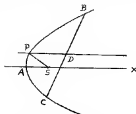
இவைகள் வெட்டும் புள்ளி, $T[at_1t_2, a(t_1 + t_2)]$

எனவே, T புள்ளி BC நேரண இரு சமமானம் மீள்க்கும் பரவளைவு மீட்டம் PD -யின் மேல் அமைந்துள்ளது.

6-53. BC நேரணப் பரவளைவின் மீட்டம் நடுப்புள்ளி D -யில் வெட்டுகிறது. அவ்மீட்டம் பரவளைவை P புள்ளியில் மெட்டியுள் $BD^2 = 4SP \cdot PD$

B, C புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் $(at_1^2, 2at_1), (at_2^2, 2at_2)$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore D$ புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\left[\frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2), a(t_1 + t_2) \right]$.



படம் 59.

$$\begin{aligned} BD^2 &= [at_1^2 - \frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2)]^2 + [2at_1 - a(t_1 + t_2)]^2 \\ &= \left[\frac{a}{2}(t_1^2 - t_2^2) \right]^2 + [a(t_1 - t_2)]^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{a^3}{4} (t_1 + t_2)^2 (t_1 - t_2)^2 + a^2 (t_1 - t_2)^2$$

$$= \frac{a^3}{4} (t_1 - t_2)^2 [(t_1 + t_2)^2 + 4]$$

$$P\text{-வகை } \gamma \text{ ஆயத்தொலைவு} = D\text{-வகை } \gamma \text{ ஆயத்தொலைவு} \\ = a(t_1 + t_2).$$

\therefore P -வகை ஆயத்தொலைவுகள்,

$$\left[\frac{a}{4} (t_1 + t_2)^2, a(t_1 + t_2) \right]$$

$$\left[\because x = \frac{y^2}{4a} = \frac{1}{4a} \cdot a^2 (t_1 + t_2)^2 = \frac{a(t_1 + t_2)^2}{4} \right]$$

$$\begin{aligned} \Delta\text{வகை, } SP^2 &= \left\{ a - \frac{a}{4} (t_1 + t_2)^2 \right\}^2 + \left\{ -a(t_1 + t_2) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{16} \left\{ 4a - a(t_1 + t_2)^2 \right\}^2 + a^2 (t_1 + t_2)^2 \\ &= \frac{1}{16} \left[\left\{ 4a - a(t_1 + t_2)^2 \right\}^2 + 16a^2 (t_1 + t_2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{16} a^2 \left[\left\{ 4 - (t_1 + t_2)^2 \right\}^2 + 16(t_1 + t_2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{16} a^2 [16 + (t_1 + t_2)^4 - 8(t_1 + t_2)^2 + 16(t_1 + t_2)^2] \\ &= \frac{1}{16} a^2 [(t_1 + t_2)^4 + 8(t_1 + t_2)^2 + 16] \\ &= \frac{1}{16} a^2 [(t_1 + t_2)^2 + 4]^2 \end{aligned}$$

$$\therefore SP = \frac{1}{4} a [(t_1 + t_2)^2 + 4].$$

$$\begin{aligned} PD &= (D\text{-வகை } x \text{ ஆயத் தொலைவு}) - (P\text{-வகை } x \text{ ஆயத்தொலைவு}) \\ &= \frac{a}{2} (t_1^2 + t_2^2) - \frac{a}{4} (t_1 + t_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{4} [2t_1^2 + 2t_2^2 - t_1^2 - t_2^2 - 2t_1t_2] \\
&= \frac{a}{4} [t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2] \\
&= \frac{a}{4} (t_1 - t_2)^2, \\
4SP.PD &= 4 \left[\frac{a}{4} \{ (t_1 + t_2)^2 + 4 \} \right], \frac{a}{4} (t_1 - t_2)^2 \\
&= \frac{a^2}{4} (t_1 - t_2)^2 [(t_1 + t_2)^2 + 4], \\
&= BD^2.
\end{aligned}$$

மாதிரி 18 : ஒரு பரவளையின் குவிய தாண்டத்தம் நடுப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி, முதல் பரவளையின் குவியத்தை மூலையாகக் கொண்ட மற்ொரு பரவளையு என நிறுவுக.

$$y^2 = 4ax \quad \dots \dots \dots (1)$$

என்ற பரவளையின் ஒரு தாண்டம் நடுப் புள்ளி (x_1, y_1) எனில் அந்த தாண்டம் சமன்பாடு,

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1.$$

இது குவியம் $S(a, 0)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore -2a(x_1 + a) = y_1^2 - 4ax_1$$

$$(அ-து) \quad y_1^2 - 2ax_1 + 2a^2 = 0$$

$$(அ-து) \quad y_1^2 - 2a(x_1 - a) = 0.$$

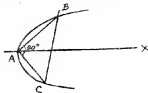
எனவே, (x_1, y_1) -இன் இயங்கு வழி,

$$y^2 - 2a(x - a) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இஃது ஒரு பரவளையாகக் குறிக்கும். இப் பரவளையின் மூலை $(a, 0)$.

(அ = து) பரவளையு (1)-இன் குவியமாகும்.

பாதி 19 : பரவளைவின் மூலையில் தேக்ககோணத்தை ஏற்கும் தாண்டளவின் நடுப்புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.



படம் 80.

$$\text{பரவளைவு } y^2 = 4ax \quad (1)$$

எனவும், மூலை A யில் தேக்ககோணத்தை ஏற்கும் பரவளைவின் தாண் BC என்றும் கொள்.

இதன் மையப் புள்ளி, (x_1, y_1) எனில்,

$$BC \text{ கோட்டின் சமன்பாடு, } T=S_1$$

$$(அ - இ) \quad yy_1 - 2a(x+x_1) = y_1^2 - 4ax_1$$

$$(அ - இ) \quad yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1 \quad \dots (2)$$

A ஆதியாக தலின் AB, AC என்ற கோடுகளின் இணைத்த சமன்பாடு, பரவளைவின் சமன்பாடு (1)-இ (2)-இனால் சம்பந்தித்தான சமன்பாட்டாக்குவதன் மூலம் கிடைக்கப் பெறலாம்.

$$(அ - இ) \quad AB, AC \text{ என்ற இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு}$$

$$y^2 - 4ax \cdot \left\{ \frac{yy_1 - 2ax}{y_1^2 - 2ax_1} \right\} = 0$$

$$(அ - இ) \quad y^2(y_1^2 - 2ax_1) - 4ax(yy_1 - 2ax) = 0 \quad \dots (3)$$

CA, CB கோடுகள் தலைச் செங்குத்தானதின் சமன்பாடு (3)-இல்,

$$x^2 \cdot \text{இன் கெழு} + y^2 \cdot \text{இன் கெழு} = 0$$

$$(அ - து) \quad (8a^2) + (y_1^2 - 8ax_1) = 0.$$

எனவே, நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) -இன் இயங்கு வழி,

$$y^2 = 8ax - 8a^2$$

$$(ஆ - து) \quad y^2 = 8a(x - 4a).$$

பயிற்சி 6.2.

1. $y^2 = 4x$ பரவளைவைச் சார்ந்த $(1, 7)$, $(4, 8)$ புள்ளிகளின் இசைக் கோடுகள் காண்க. இவைகள் வெட்டும் புள்ளியின் இசைக் கோடு கொடுத்ததன் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு என நிறுவுக.
2. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த P புள்ளியின் இசைக் கோடு, $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடுகோடுகளில் P -யின் இயங்கு வழி காண்க.
3. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ -இன் முனைவில் செங்கோணத்தை ஏதும் தானின் இசைப் புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழி காண்க.
4. பரவளைவின் குவிய தாண்கள்தம் இசைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி அதன் இயக்கு வரை என நிறுவுக.
5. பரவளைவின் முனைவிலுள்ள தொடுகோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகளிலிருந்து, ஆர புள்ளிகளின் பரவளைவைச் சார்ந்த இசைக் கோடுகளுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகள்தம் ஆரப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி ஒரு வட்டம் என நிறுவுக. அம் வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க.
6. ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள் ஆய்வுசூழல் சிறப்பிக்கும் கோணங்கள் நிர்ப்பக்கோணங்களெனின் அத் தொடுகோடுகளின் தொடுதான் நிலைத்த புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.
7. $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ வட்டத்தைத் தொட்டும் $y^2 = 2x$ பரவளைவின் தானின் நடுப்புள்ளியின் இயங்கு வழி காண்க.

8. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் செங்கோட்டு நான்களின் தடுப் புள்ளிகளிடம் இயங்கு வழிக் காண்க.
9. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ -இன் முனைவிடத்துச்செங் கோணத்தை ஏற்கும் நான்கள்தம் தடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $y^2 = 2a(x - 4a)$ என நிறுவுக.
10. $y^2 + 4bx = 0$ பரவளைவுத் தொடுகோடு ஒன்று $y^2 = 4ax$ பரவளைவை B, C -யில் வெட்டினால், BC -யின் தடுப் புள்ளியின் இயங்கு வழி $y^2(2a+b) = 4a^2x$ என நிறுவுக.
11. இரு தொடுகோடுகள் ஆயத்துடன் சிறப்பிக்கும் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை ஒரு மாறிலி எனில், அத் தொடுகோடுகள் வெட்டும புள்ளியின் இயங்கு வழி ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.
12. $x^2 + y^2 = c^2$ வட்டத் தொடுகோடுகளின் $y^2 = 4ax$ -ஐச் சார்ந்த இணைப் புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழி $4a^2(x^2 - c^2) = c^2y^2$ என நிறுவுக.
13. $y^2 = 4ax$ பரவளைவில் $2k$ நீளமுள்ள நான்கள்தம் தடுப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $(y^2 + 4a^2)(4ax - y^2) = 4a^2k^2$ என நிறுவுக.
14. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ வட்டத் தொடு கோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டு கிறதெனின், P, Q -யின் தடுப் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.
15. P -இனிலுந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள் முனைவிடத்துத் தொடுகோவட்டன் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு k^2 எனில், P -யின் இயங்கு வழி $x^2(y^2 - 4ax) = 4k^4$ என நிறுவுக.
16. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் செங்கோட்டு நான்கள்தம் இணைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $(x + 2a)y^2 + 4a^2 = 0$ என நிறுவுக.
17. P புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ -ஐச் சார்ந்த ஆறாவது இணைக் கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துத் தொடு $x^2 = 4by$ பரவளைவின் தொடு கோட்டெனில் P -யின் இயங்கு வழி $2ax + by + 4a^2 = 0$ என நிறுவுக.

18. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடுகோடுகளின் $x^2 = 4by$ பரவளைவைச் சார்ந்த இரைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $ay^3 = 4b^3x$ என நிறுவுக.

19. இயக்கு வரையிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $y^2(a+2x) = a(a+2x)^2$ என நிறுவுக.

20. நிலத்தடிபுள்ளி ஒன்றின் வழிச் செல்லும் பரவளைவு தரையெந்தம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி மற்கெரு பரவளைவு என நிறுவுக.

21. $x = at + bt^2$, $y = ct + dt^3$ சமன்பாடுகள் ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும் எனக்காட்டுக. இப்பரவளைவின் துணையகுறு t_1, t_2 புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\begin{vmatrix} x & y & t_1 t_2 \\ a & c & t_1 + t_2 \\ b & d & -1 \end{vmatrix} = 0$$

என நிறுவுக.

22. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் t^3 புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டு

$$தாளின் நீளம் = \frac{4a(1+t^6)^{\frac{3}{2}}}{t^3} \text{ என நிறுவுக.}$$

23. $(\theta < 0)$ புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் மூன்று செங்கோடுகளின் ஆடிப்புள்ளியைக் காண்க.

24. $x^2 + y^2 - 8ax + c = 0$, $x^2 + y^2 + 8bx + c = 0$ வட்டங்கள் ஒரு கோட்டினமீது சமநீளமுள்ள வெட்டுத்துண்டுகளை ஏற்றுகெனில், அக்கோடு $y^2 = 8(a-b)x$ பரவளைவின் தொடுகோடென நிறுவுக.

25. $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு P புள்ளியிலிருந்து வரையும் மூன்று செங்கோடுகளில் இரண்டு தம்மால் செங்குத் தெனில், P புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

வினாக்கள்

1. $2x - 7y + 2 = 0$; $x - 4y + 4 = 0$; $(20, 8)$.
2. $x + 4a = 0$. 5. $(a, 0)$, a . 7. $(y^2 - x + 1)^2 = 6(y^2 + 1)$.
8. $\frac{y^2}{2a} + \frac{4a^2}{y^2} = x - 2a$. 22. $(0, 0)$, $(4a, 4a)$; $(4a, -4a)$.
25. $y^2 = a(x - 3a)$.

7. நீள் வட்டம் (Ellipse)

7.1. நீள் வட்டம்—வரைபணை

ஒரு உப்பு வெட்டியின் மையத்தொலை விகிதம் $e < 1$ எனில், அது நீள்வட்டம் எனப்படும்.

7.2. நீள் வட்டம்—சமன்பாடு

நுனியம் $S(\alpha, \beta)$ எனவும், இயக்கு வரை $lx + my + n = 0$ எனவும் கொள்வோம். நீள் வட்டத்தின் மீது $P(x_1, y_1)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனில்,

நுனியத்திலிருந்து P -யிக்கு உள்ள தூரம்,

$$SP = \sqrt{(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2}$$

$lx + my + n = 0$ கோட்டிலிருந்து P -க்கு உள்ள தூரம்,

$$PM = \frac{lx_1 + my_1 + n}{\pm \sqrt{l^2 + m^2}}.$$

வரைபணையின் படி,

$$\frac{SP}{PM} = e \quad (e < 1)$$

$$(அ - து) \quad SP^2 = e^2 \cdot PM^2$$

$$\therefore (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = e^2 \left[\frac{lx_1 + my_1 + n}{\pm \sqrt{l^2 + m^2}} \right]^2$$

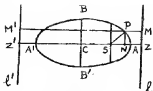
$$(அ - து) \quad (l^2 + m^2)[(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2] = e^2(lx_1 + my_1 + n)^2.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ -இன் இயங்கு வதி (அ - து) தீர் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2 \frac{(x+my+n)^2}{l^2 + m^2}$$

7-3. தீர் வட்டம் சமன்பாட்டின் நிலை வடிவம்

தீர் வட்டத்தின் குவியம் S , இயக்குவரை l , அளவத் தொலை விலிதம் e எனக் கொள்வோம்.



படம் 61

S புள்ளியிலிருந்து இயக்குவரை l -க்கு SZ என்ற செங்குத்துக் கோடு வரையவும். - SZ -ஐ $e : 1$ விகிதத்தில் உள்நூல் புறநூல் A, A' புள்ளிகள் பிரிக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

AA' -ஐ C புள்ளியில் இரு சமமாகப் பிரிக்கவும். $AA' = 2a$ எனின், $AC = CA' = a$.

வரையறையின்படி A, A' புள்ளிகள் தீர் வட்டத்தின் மேலமைவும்.

$$\text{மேலும், } \frac{SA}{AZ} = e, \quad \frac{SA'}{A'Z} = e.$$

$$\therefore SA = e \cdot AZ \quad \dots \quad (1)$$

$$SA' = e \cdot A'Z \quad \dots \quad (2)$$

$$SA + SA' = e(AZ + A'Z)$$

$$(அ - து) \quad AA' = e(CZ - CA + CA' + CZ)$$

ப. வ.-16.

$$\therefore SA = e, \text{ & } CZ, \quad (\because CA = CA')$$

$$\therefore CZ = \frac{a}{e} \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

மேலும், (2)-இலிருந்து (1)-ஐக் கழிப்பீவர்,

$$SA' - SA = e (A'Z - AZ)$$

$$(அ - ௨) \quad (A'S + CS) - (CA - CS) = e.AA'$$

$$\therefore 2CS = e.2a$$

$$(அ - ௨) \quad CS = ae \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

C-ஐ ஆதிவாகவும், CA கோட்டை, & ஆய்வாகவும் கொள்வோம். CA-க்குச் செங்குத்தாக C-லிலிருந்து வரையுங் CB கோட்டை y ஆய்வாகக் கொள்ளோம்.

எனவே, C-லின் ஆயத்தொலைகள் (0, 0)

S-இன் ஆயத்தொலைகள் (ae, 0)

இவக்குவரை l-இன் சமன்பாடு $x = \frac{a}{e}$.

P (x₁, y₁) ன் வட்டத்தில் மீதமைந்துள்ள யாப்தனும் ஒரு புள்ளி எனின், வரைவறையின்படி,

$$\frac{SP}{PM} = e (<)$$

$$(அ - ௨) \quad SP^2 = e^2.PM^2,$$

$$SP^2 = (x_1 - ae)^2 + y_1^2$$

$$PM^2 = \left(x_1 - \frac{a}{e} \right)^2$$

$$\left[\because PM = NZ = CZ - CN = \left(\frac{a}{e} - x_1 \right) \right]$$

$$\therefore (x_1 - ae)^2 + y_1^2 = e^2 \left(x_1 - \frac{a}{e} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 (\text{அ} - \text{து}) \quad x_1^2 + y_1^2 - 2x_1ae + a^2e^2 \\
 = e^2 \left[x_1^2 - 2x_1 \frac{a}{e} + \frac{a^2}{e^2} \right] \\
 = e^2 x_1^2 - 2x_1ae + a^2.
 \end{aligned}$$

$$\text{எனவே, } x_1^2(1-e^2) + y_1^2 = a^2(1-e^2).$$

இரு பக்கமும் $a^2(1-e^2)$ -ஆல் வகுப்பின்,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

$\therefore P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி (அ-து) நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

$$b^2 = a^2(1-e^2) \text{ எனப் குறிப்பிடுவ்}$$

$$\text{சமன்பாடு, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ என்ற வடிவம் பெறும்.}$$

7.4. நீள் வட்டத்தின் தன்மைகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{நீள் வட்டம்.}$$

(i) சமன்பாடு x, y ஆயங்களான சமச் சீருடையதாகிவரும் தரம் (x, y) புள்ளி நீள் வட்டத்திலிருப்பின், $(-x, -y)$, $(x, -y)$, $(-x, y)$ புள்ளிகளும் நீள்வட்டத்திலிருக்கும்.

(ii) (x, y) , $(-x, -y)$ புள்ளிகளைச் செங்குத்து கோடு ஆகி (C) வழிச் செல்வதாக, C வழிச் செல்லும் அனைத்து நான்கிலையும் C சமணாகப் பிரிக்கும். C புள்ளி நீள் வட்டத்தின் மையம் எனப்படும்.

(iii) x ஆயத்தை நீள் வட்டம் $(\pm a, 0)$ புள்ளிகளிலும், y ஆயத்தை $(0, \pm b)$ புள்ளிகளிலும் வெட்டும். x ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் A, A' எனவும், y ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் B, B' எனவும் குறிப்பிடப்படுகின்றன. A, A' நீள் வட்டத்தின் முன்கன்களாகும். நீள் வட்டம் A, A', B, B' புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது.

$$(iv) \quad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

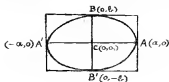
$\therefore y > b, y < -b$ எனில், x கற்பனை மதிப்புடையது.

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$\therefore x > a, x < -a$ எனில், y கற்பனை மதிப்புடையது.

எனவே, நீள் வட்டம் $x = \pm a, y = \pm b$ என்ற நீண்ட சதுரத்தினுள் அடங்கும்.

(V) x -இன் மதிப்பு பூச்சியத்திலிருந்து a வரை அதிகரிக்கும் போது, y -யின் மதிப்பு 0-லிருந்து பூச்சியத்திற்குக் குறைகும்.



படம் ௫௨.

7.5. இரண்டாவது குவியம், இயக்கு வரை

பத்தி 7.8-இல் உள்ள படம் ௭1-இல் CA' கோட்டின் மீது S', Z' புள்ளிகளை $CS = CS', CZ = CZ'$ என்றிருக்கும்படி குறிக்கவும்.

CZ' கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக Z' புள்ளி வழி $Z'M'$ கோடு வரையவும். $Z'M'$ -க்குச் செங்குத்தாக P -யிலிருந்து $P'M'$ கோடு வரையவும்.

$$\text{நீள் வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(அ - ஆ) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

$$(அ - து) \quad (1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2).$$

$$(அ - து) \quad x^2 + y^2 + a^2e^2 = a^2 + x^2e^2$$

இரு பக்கமும் $2axe$ -ஐக் கூட்டினால்,

$$x^2 + 2axe + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 + 2axe + a^2.$$

$$(x + ae)^2 + y^2 = e^2 \left[x + \frac{a}{e} \right]^2 \quad (1)$$

$P(x, y)$ என்பது தீர் வட்டத்தில் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனில், சமன்பாடு (1)

$$S'P^2 = e^2.PM'^2 \text{ என்கறும்.}$$

$$(அ - து) \quad S'P = e.PM'$$

(அ - து) தீர் வட்டத்தில் மீதுள்ள P புள்ளிக்கு S' புள்ளி விலிருந்து உள்ள தூரம், $Z'M'$ கோட்டிலிருந்து P -யின் தூரத்தின் e மடங்காகும்.

$e < 1$ எனில், இது தீர் வட்டத்தின் வரையறைபரம். எனவே, $S', Z'M'$ என்பவை நுறையே தீர் வட்டத்தின் இரண்டாவது குவியம், இரண்டாவது இயக்குவரை வாகும். எனவே, தீர் வட்டம் இரண்டு குவியங்கள், இரண்டு இயக்கு வரைகள் கொண்டிருக்கும்.

இரண்டாவது குவியத்தின் ஆயத் தொலைகள் $S'(-ae, 0)$

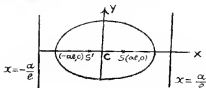
இரண்டாவது இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x = -\frac{a}{e}$.

$$7.6. \quad \text{தீர் வட்டம்} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(i) $a > b$ எனில், வரையத் தொலை விலிதம் e , $b^2 = a^2(1 - e^2)$ சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும். ae , b என்பவை நுறையே தீர் வட்டத்தின் பேரச்ச (major axis), சிற்றச்ச (minor axis) எனப்படும்.

தீர் வட்டத்தின் குவியங்கள் $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$.

இவர்களுக்கள் $x - \frac{a}{e} = 0$; $x + \frac{a}{e} = 0$.

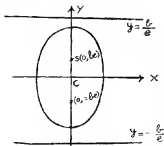


படம் 63.

(ii) $b > a$ எனில், மையத் தொலை விகிதம் e , $a^2 = b^2(1 - e^2)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும். பேரச்ச y ஆவத்தின் மீதும், சிற்றச்ச x ஆவத்தின் மீதும் அமைகும். பேரச்ச நீளம் $2b$, சிற்றச்ச நீளம் $2a$.

குவிவக்களின் ஆவத் தொலைகள் $(0, be)$, $(0, -be)$

இவர்களுக்கள் $y - \frac{b}{e} = 0$; $y + \frac{b}{e} = 0$.



படம் 64.

7.7. செவ்வகவம் (Latus Rectum)

குவியம் S வழி பேரக்கிற்குச் செங்குத்தாக வரையும் கோடு தீர் வட்டத்தை L, L' புள்ளிகளில் வெட்டினால், LSL' எனும் தாண் தீர் வட்டத்தின் செவ்வகவம் எனப்படும்.

L -இன் x ஆயத்தொலை = S -இன் x ஆயத்தொலை = ae . L -இன் y ஆயத்தொலை SL எனின்,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{தீர் வட்டத்தில்}$$

$$\frac{a^2 e^2}{a^2} + \frac{SL^2}{b^2} = 1$$

$$(அ - ஆ) \quad SL^2 = b^2(1 - e^2)$$

$$= b^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} \quad [\because b^2 = a^2(1 - e^2)]$$

$$= \frac{b^4}{a^2}$$

$$\therefore SL = + \frac{b^2}{a}.$$

எனவே, செவ்வகவத்தின் தீர்வம்

$$LSL' = LS + SL' = \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a} = \frac{2b^2}{a}.$$

பேரக்க $2b$, சிறுக்க $2a$ எனின்,

$$\text{செவ்வகவத்தின் தீர்வம்} = \frac{2a^2}{b}$$

7.8. தீர் வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியின் குவியதூரங்கள் தம் (focal distances) கூட்டுத்தொகை பேரக்கின் தீர்வத்திற்குச் சமம்

$P(x, y)$ தீர் வட்டத்தின் மீதுள்ள யாதொருமும் ஒரு புள்ளி எனக் கொள்க.

குவியங்கள் $S(ae, 0), S'(-ae, 0)$.

[பகுதி 7-8-இல் உள்ள படம் 61-ஐக் காண்க].

வரையறைப்படி $SP = e \cdot PM$, $S'P = e \cdot PM'$

$$\therefore SP = e \cdot PM - e(NZ) = e(CZ - CN) = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex$$

$$S'P = e \cdot PM' = e(NZ') = e(CZ' + CN) = e\left(\frac{a}{e} + x\right) = a + ex$$

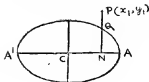
$$\therefore SP + S'P = (a - ex) + (a + ex) = 2a.$$

= பேரச்சிவ் நீளம்.

எனவே, நீர் வட்டத்தைப் பின் வருமாறு வரையலாம்.

இரு நிலைத் புள்ளிகளிலிருந்து P என்ற மாதேனும் ஒரு புள்ளியில் நூல்களின் கூட்டுத் தொகை ஒரு மாறிலியெனின், அப் புள்ளியின் இயக்கு வழி நீர் வட்டமாகும்.

7.9. $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் நிலை



படம் 65.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் நிலை வழிப, அப் புள்ளியிலிருந்து பேரச்சிவ் PN என்ற செங்குத்துக் கோடு வரையவும். இது நீர் வட்டத்தை Q புள்ளியில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம்.

$NP > NQ$ எனின்,

P புள்ளி நீர் வட்டத்தின் வெளியே இருக்கும்.

$$NP = y_1, \quad NQ = b \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ நீள் வட்டத்திற்கு வெளியே இருப்பின்,

$$y_1^2 > b^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} \right)$$

$$(அ - அ) \quad \frac{y_1^2}{b^2} > 1 - \frac{x_1^2}{a^2}$$

$$(அ - அ) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1.$$

இவ்வாறே $P(x_1, y_1)$ நீள் வட்டத்திற்குள்ளே இருப்பின்,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1.$$

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி நீள் வட்டத்தின் மீது அமையுமெனின்,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

எனவே, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \geq 1$ எனின், (x_1, y_1) நீள் வட்டத்தின் வெளியே, மேலே அல்லது உள்ளே இருக்கும்.

மாதிரி 1: ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியம் $(1, 2)$, மையத்தொடும் வீச்சும் $\frac{2}{3}$, ஒத்த இயக்குவரை $2x - 3y + 6 = 0$ எனில், நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

$P(x_1, y_1)$ நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனில்,

குவியம் $S(1, 2)$ -இலிருந்து P -வின் தூரம்

$$SP = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2}$$

$2x - 3y + 6 = 0$ இயக்குவரையிலிருந்து P -வின் தூரம்

$$PM = \frac{2x_1 - 3y_1 + 6}{\pm \sqrt{2^2 + 3^2}}$$

மையத்தொடும் வீச்சும் $c = \frac{2}{3}$ ஆகவின்,

$$\text{வகையகற்றலில்படி} \cdot \frac{SP}{PM} = e$$

$$\therefore SP^2 = e^2 PM^2$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{(2x_1 - 3y_1 + 6)^2}{18}$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad 117[x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 4y_1 + 5] \\ = 4[4x_1^2 + 9y_1^2 - 88 - 12x_1y_1 - 24x_1 - 36y_1]$$

$$\therefore 101x_1^2 + 48x_1y_1 + 51y_1^2 - 880x_1 - 824y_1 + 441 = 0.$$

எனவே, $f(x_1, y_1)$ -இன் இயங்கு வரீ (அ-ஆ) தன் வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$$101x^2 + 48xy + 51y^2 - 880x - 824y + 441 = 0.$$

மாதிரி 2 : $4x^2 - 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$ தன் வட்டத்தின் மையம், மையத் தொலைவிற்கும், அச்சக்களின் தூரங்கள், செங்குகலம், குவியங்கள் ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0.$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad 4(x^2 + 2x) + 9(y^2 + 4y) = -4$$

$$4(x^2 + 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = -4 + 4 + 36$$

$$\therefore 4(x+1)^2 + 9(y+2)^2 = 36$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

ஆதிலை $(-1, -2)$ புள்ளிக்கு மாற்றினால் சமன்பாடு,

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$$

என்றாகும்.

தன் வட்டத்தின் (புதிய ஆயங்களைப் பொறுத்து)

$$\text{மையம்} \quad (X = 0, Y = 0).$$

$$\text{மெச்சு தூரம்} \quad 3 \times 2 = 6.$$

$$\text{சிறந்த தூரம்} \quad 2 \times 2 = 4.$$

$$6^2 = 6^2(1 - e^2)$$

$$4 = 6(1 - e^2)$$

$$\therefore \frac{4}{6} = 1 - e^2 \quad (\text{அ-து}) \quad e^2 = \frac{5}{6}$$

எனவே, மையத் தொலை விகிதம் $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$\text{குவிவம்} \quad S \left[X = 3, \frac{\sqrt{6}}{3}, Y = 0 \right]$$

$$\text{குவிவம்} \quad S' \left[X = -\frac{3\sqrt{6}}{3}, Y = 0 \right]$$

மெய்க்கோணத்தின் நீளம்,

$$= 2 \cdot \frac{3}{3} = \frac{8}{3}.$$

இவற்று வரைகள்,

$$X = \frac{3}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{9}{\sqrt{6}}$$

$$X = -\frac{3}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = -\frac{9}{\sqrt{6}}$$

பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்து

மையம் $(x + 1 = 0, y + 2 = 0)$ (அ-து) $(-1, -2)$.

பேரச்சு, சிற்றச்சு நீளம் முறையே 3, 4.

மையத் தொலை விகிதம் $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

குவிவங்கள் $S [x + 1 = \sqrt{6}, y + 2 = 0]$

(அ-து) $[\sqrt{6} - 1, -2]$.

$S' [x + 1 = -\sqrt{6}, y + 2 = 0]$

(அ-து) $[-\sqrt{6} - 1, -2]$.

இயக்கு வராகள்,

$$x + 1 = \frac{9}{\sqrt{6}} \quad (\text{அ-அ}) \quad \sqrt{6}x + (\sqrt{6}-9)=0$$

$$(\text{அ-அ}) \quad \sqrt{6}x + (6-9\sqrt{6})=0.$$

$$x + 1 = -\frac{9}{\sqrt{6}} \quad (\text{அ-அ}) \quad \sqrt{6}x + (6+9\sqrt{6})=0.$$

$$\text{செய்வகருத்தின் தளம்} = \frac{8}{3}.$$

7.10. $y = mx + c$ கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தன் வட்டத் தொடு கோடாகவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$y = mx + c \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$$

$$(\text{அ-அ}) \quad x^2 \left[\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right] + \frac{2mc}{b^2}x + \frac{c^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$(\text{அ-அ}) \quad x^2(a^2m^2+b^2) + 2mcx + a^2(c^2-b^2)=0 \quad (3)$$

இது x -இல் இருபடிச் சமன்பாடாகவின், x -இன் இரு மறிப்புக் களும் (1), (2) வட்டமும் இரு புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகளை அளக்கும்.

x -இன் இரு மறிப்புக்களும் சமமெனின், கோடு (1), தன் வட்டம் (2)-இன் தொடுகோடாகும்.

\therefore சமன்பாடு (3)-இன் தன்மைக்காட்டி, பூச்சியம்.

$$(\text{அ-அ}) \quad 4m^2c^2a^4 - 4(a^2m^2+b^2)a^2(c^2-b^2)=0$$

$$\text{இதைத் கருக்கின்,} \quad c^2=a^2m^2+b^2$$

$$\therefore c = \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

(அ-அ) m -இன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்

$$y + mx = \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

எனும் கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் தொடு கோடாகும்.

7-11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளி மீடத்துத் தொடுகோடு;

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ நீள் வட்டத்தின்மீது மிக அருகாமையிலுள்ள இரு புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (2)$$

(1)-இலிருந்து (2)-ஐக் கழிப்பின்,

$$\frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = -\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2}$$

$$(அ-அ) \quad \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{b^2} = -\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{a^2}$$

$$\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} \quad \dots \quad (3)$$

நான் PQ -யின் சமன்பாடு,

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

$$(அ-அ) \quad y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$$

சமன்பாடு. (3)-ஐ இதில் பிரதியிடுவர், நானின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} (x - x_1) \quad \dots \quad (4)$$

என்றாகும்.

$Q(x_1, y_1)$ புள்ளி $P(x_1, y_1)$ புள்ளியைப் நெருங்கி, முடிவில் அந்நுட்பம் பொருத்தம்போது PQ என்ற நான் $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடாகும்.

∴ சமன்பாடு (4)-இல், $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ எனப் பிரதியிடுவர், P விடத்துத் தொடுகோடு,

$$y - y_1 = - \frac{bx_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$$

$$(அ-அ) \quad \frac{yy_1 - y_1^2}{b^2} = - \frac{bx_1(x - x_1)}{a^2}$$

$$(அ-அ) \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

$$\parallel 1 \quad \text{[சமன்பாடு (1)]}$$

∴ $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

$$7.12. \quad y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \text{ தொடுகோடு } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

நீள் வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளி

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (2)$$

கோடு (1), நீள் வட்டம் (2)-ஐத் தொடும் புள்ளி (x_1, y_1) எனில், அப்புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு,

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே சேர்க்க கோட்டைக் குறிக்கும்

$$\therefore \quad \frac{y_1}{b^2} = - \frac{x_1}{a^2 m} = - \frac{1}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{-a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}, \quad y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}$$

எனவே, $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ தொடு கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -ஐத் தொடுகின்ற புள்ளி, $\left[\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}, \frac{+b^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}} \right]$.

7.13. குறித்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு இரு தொடு கோடுகள் வரையக் கூடும்.

குறித்த புள்ளி (x_1, y_1) எனவும்,

நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனவும் கொள்வோம்.

நீள் வட்டத்தின் தொடுகோடு,

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \dots \quad (1)$$

இது (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்வின்,

$$y_1 = mx_1 + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

$$\therefore (y_1 - mx_1)^2 = a^2m^2 + b^2.$$

$$(அ - து) \quad m^2(x_1^2 - a^2) - 2x_1y_1m + (y_1^2 - b^2) = 0 \quad \dots (2)$$

இது m -இல் இருபடிச் சமன்பாடாகவின், m -இன் இரு மதிப்புகள் m_1, m_2 எனக் கொள்வோம்.

இவ்வகை (1)-இல் பிரதியிடுவர்,

$$y = m_1x + \sqrt{a^2m_1^2 + b^2},$$

$$y = m_2x + \sqrt{a^2m_2^2 + b^2},$$

என்ற இரு தொடுகோடுகள் கிடைக்கப் பெறும்.

எனவே (x_1, y_1) என்ற குறித்த புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையக் கூடும்.

7.14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளி மீட்புத் தொடுகோடு

(x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 = 0.$$

$$\text{இதன் சரிவு} = - \frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{y_1}{b^2}}$$

எனவே, செங்கோட்டுக் சரிவு,

$$\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \quad [\because m_1 m_2 = -1].$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு,

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$$

$$(\text{அ-து}) \quad b^2 x_1 y - b^2 x_1 y_1 = a^2 x y_1 - a^2 x_1 y_1$$

$$\therefore a^2 x y_1 - b^2 y x_1 = (a^2 - b^2) x_1 y_1$$

$$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2.$$

$$\text{எனவே, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{நீர் வட்டத்தின் } (x_1, y_1)$$

புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு,

$$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2.$$

எாதி 3: $8x^2 + 7y^2 = 115$ நீர் வட்டத்தின் (1, 4)
புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு, செங்கோடு காண்க.

$$\frac{x^2}{\frac{115}{8}} + \frac{y^2}{\frac{115}{7}} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

(1, 4) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$\frac{x.1}{\frac{115}{8}} + \frac{y.4}{\frac{115}{7}} = 1$$

$$(\text{அ-து}) \quad 8x + 28y = 115$$

$$\text{செங்கோட்டின் சமன்பாடு} \quad 28x - 3y = k.$$

$$\text{இது } (1, 4) \text{ வழிச் செல்லின்} \quad 28 - 12 = k$$

$$\therefore k = 16$$

$$\text{எனவே, } (1, 4) \text{ புள்ளியிலே செங்கோடு}$$

$$28x - 3y - 16 = 0.$$

$$\text{மூலம் 4} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ நீள் வட்டத்திற்கு வரையப்படும்}$$

இரு தொடுகோடுகள் தம்மால் செங்குத்தாக P புள்ளியில் வெட்டினால், P -யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் இது தொடு}$$

கோடுகள் தம்மால் $P(x_1, y_1)$ -இல் வெட்டுகின்றன எனக் கொள்வோம்.

நீள் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சரிவுகள் m_1, m_2 எனில், ஆகையால் தீர்வாகும் சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும். [பத்தி 7-18].

$$m^2(x_1^2 - a^2) - 2x_1 y_1 m + (y_1^2 - b^2) = 0.$$

$$\therefore m_1 m_2 = \text{தீர்வுகளின் பெருக்குத்தொகை} = \frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2}.$$

$$\text{தொடுகோடுகள் தம்மால் செங்குத்தெனில், } m_1 m_2 = -1.$$

$$\therefore \frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2} = -1$$

$$(\text{அ-து}) \quad x_1^2 - a^2 + y_1^2 - b^2 = 0$$

$$(\text{ஆ-து}) \quad x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2.$$

$$\text{எனவே, } P(x_1, y_1) \text{ புள்ளியை இயங்கு வழி}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

இஃது ஒரு வட்டமாகும். இதன் மையம் $(0, 0)$ ஆகும் $= \sqrt{a^2 + b^2}$. இவ்வட்டம் குத்துத் தொடுகோடு வட்டம் (director circle) எனப்படும்.

சூத்ப்பு 1: பரவளைவின் மூத்துத் தொடுகோடு வட்டம் அதன் இயக்கு வரையாகும்.

மாநிதி 5: $lx + my + n = 0$ கோடு, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீன் வட்டத்தின் தொடுகோடெனில், தொடு புள்ளியைக் காண்க.

தொடு புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளி மூத்துத்தொடுகோடு,

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{கோடுத்தூவன் கோடு } lx + my + n = 0 \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்குமாதலால்,

$$\frac{y_1}{lx_1} = \frac{y_1}{mb^2} = -\frac{1}{n}.$$

$$(\text{அதன்}) \quad x_1 = -\frac{a^2l}{n}, \quad y_1 = -\frac{b^2m}{n}.$$

$$\therefore \text{ தொடுபுள்ளி, } \left(-\frac{a^2l}{n}, -\frac{b^2m}{n} \right).$$

மாநிதி 5 (ii): $lx + my + n = 0$ கோடு, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீன் வட்டத்தின் தொடுகோடாவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு யாது?

$$lx + my + n = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (2)$$

$$(1) \text{-ஐ மீறுத்து } y = -\frac{l}{m}x - \frac{n}{m},$$

∴ பத்தி 7·10-இன்படி, தேவையான கட்டுப்பாடு,

$$\left(-\frac{n}{m}\right)^2 = a^2\left(-\frac{l}{m}\right)^2 + b^2$$

[∵ $c^2 = a^2m^2 + b^2$]

(அ-து) $n^2 = a^2l^2 + b^2m^2$.

மாநிசி 6: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தின் தொடுகோடு களுக்கு, அதன் மையத்திலிருந்து வரையும் $\frac{1}{a^2}$ செங்குத்துக்கோடு களும் அடிப்புக்களின் இயங்கு வழிக் காண்க.

தொடுகோடு, $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$... (1)

(1)-க்குச் செங்குத்தாக மையம் (ஆதி) வழிச் செல்லும் கோடு,

$$y = -\frac{1}{m}x \pm \dots \dots (2)$$

மையத்திலிருந்து தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி, (x_1, y_1) எனின், அடிப்புள்ளி சமன்பாடு கள் (1), (2)-இல் பொருத்தும்,

$$\therefore y_1 = mx_1 + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \dots \dots (3)$$

$$y_1 = -\frac{1}{m}x_1 \dots \dots (4)$$

இச் சமன்பாடுகளில் ம-ஐ நீக்கின் (x_1, y_1) -இன் இயங்கு வழி கிடைக்கப்பெறும்,

(4)-இலிருந்து $m = -\frac{x_1}{y_1}$,

இதை (3)-இல் பிரதியிடுக,

$$y_1 = -\frac{x_1}{y_1}x_1 + \sqrt{a^2\frac{x_1^2}{y_1^2} + b^2}$$

(அ-து) $y_1^2 + x_1^2 = \sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2}$

$$\therefore (x_1^2 + y_1^2)^2 = a^2x_1^2 + b^2y_1^2.$$

எனவே, (x_1, y_1) மூலியின் இயங்கு வழி

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$

மாதிரி 7: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ தன் வட்டத்தின் குவியல் களிலிருந்து அதன் தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகள்தம் பெருக்குத் தொகை b^2 எனவும், இச் செங்குத்துக் கோடுகளின் ஆப்புள்ளிகள்தம் இயங்குவழி $x^2 + y^2 = a^2$ எனவும் திறவுக.

$$\text{தொடுகோடு, } y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \quad \dots \quad (1)$$

$p_1 = S(ae, 0)$ -த்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்

$$= \frac{-mae - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$p_2 = S(-ae, 0)$ -த்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின்

$$\text{நீளம்} = \frac{mae - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

$$p_1 p_2 = \frac{-(mae + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}) \cdot (mae - \sqrt{a^2 m^2 + b^2})}{\sqrt{1 + m^2} \cdot \sqrt{1 + m^2}}$$

$$= \frac{-(m^2 a^2 e^2 - a^2 m^2 - b^2)}{1 + m^2}$$

$$= \frac{a^2 m^2 (1 - e^2) + b^2}{1 + m^2}$$

$$= \frac{m^2 b^2 + b^2}{1 + m^2} = \frac{b^2 (1 + m^2)}{1 + m^2} = b^2.$$

\therefore செங்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத்தொகை b^2 .

மேலும், (1)-க்குச் செங்குத்தாக $S(ae, 0)$ வழிச் செல்லும் கோடு,

$$y = -\frac{1}{m}(x - ae).$$

$$\text{(அ-ஆ)} \quad x + my = ae \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

தொடுகோடு (1)-ம், அதற்குச் செங்குத்தாக $S(ae, 0)$ -த்தி னிருந்து வரையும் கோடு (2)-ம் நேரன் (x_1, y_1) புள்ளியில் வெட்டினும்,

$$y_1 = mx_1 + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \dots \quad (3)$$

$$x_1 + my_1 = ae \quad \dots \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4)-இருத்து (x_1, y_1) -ஐ தீக்கின் (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி கண்டுகள் பெறும்.

சமன்பாடுகள் (3), (4)-ஐ வச்சகப்படுத்திக் கூட்ட,

$$(y_1 - mx_1)^2 + (x_1 + my_1)^2 = a^2m^2 + b^2 + a^2e^2,$$

$$y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 + x_1^2 + m^2y_1^2 + 2mx_1y_1 = a^2m^2 + b^2 + a^2e^2,$$

$$(அ-ஐ) \quad (x_1^2 + y_1^2) + m^2(x_1^2 + y_1^2) = a^2m^2 + a^2(1 - e^2) + a^2e^2,$$

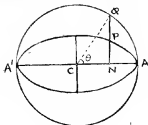
$$(அ-ஐ) \quad (x_1^2 + y_1^2)(1 + m^2) = a^2(1 + m^2),$$

$$\therefore x_1^2 + y_1^2 = a^2.$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி,

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

7.15. துணை வட்டம் (Auxiliary Circle), துணை வட்டக் கோணம் (Eccentric Angle)



படம் 86.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் பேரத்தை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் அதன் துணை வட்டம் (auxiliary circle) எனப்படும்.

நீள் வட்டத்தின் மீது பாதேனும் ஒரு புள்ளி P எனில், P -யின் குத்தாய்வு (ordinate) NP -ஐ நீட்டி, அது துணை வட்டத்தை Q -யில் வெட்டுகிறது. $\angle QCN = \theta$ எனில், கோணம் θ , P புள்ளியின் துணைவட்டக் கோணம் (eccentric angle) எனப்படும். P , Q புள்ளிகள் ஒத்த புள்ளிகள் (corresponding points) எனப்படுகின்றன.

Q புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $[CN, NQ]$

(அ-து) $[a \cos \theta, a \sin \theta]$.

P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $[CN, NP]$.

இப்புள்ளி $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் மீதுள்ளதால்

$$\frac{CN^2}{a^2} + \frac{NP^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad NP^2 &= b^2 \left[1 - \frac{a^2 \cos^2 \theta}{a^2} \right] \\ &= b^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

$$\therefore NP = \pm b \sin \theta$$

எனவே, P -யின் ஆயத்தொலைகள் $[a \cos \theta, b \sin \theta]$.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ மீதவையும் எந்த ஒரு புள்ளியும் $[a \cos \theta, b \sin \theta]$ வடிவில் ஆயத்தொலைகள் கொண்டிருக்கும். எனவே, இதை நீள் வட்டத்தின் துணை அலைகாகக் கொள்ளலாம். கருக்கமாக, இப்புள்ளி θ எனப்படும்.

7-16. நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள θ , ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் தாளின் சமன்பாடு

$$\text{நீள் வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

நீள் வட்டம்

இதன் மீதுள்ள $P(\theta)$, $Q(\phi)$ புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்,

$$(a \cos \theta, b \sin \theta), \quad (a \cos \phi, b \sin \phi)$$

\therefore நான் PQ -வின் சமன்பாடு,

$$\frac{y - b \sin \theta}{b \sin \theta - b \sin \phi} = \frac{x - a \cos \theta}{a \cos \theta - a \cos \phi}$$

$$(அ-ஆ) \quad y - b \sin \theta = \frac{b(\sin \theta - \sin \phi)}{a(\cos \theta - \cos \phi)}(x - a \cos \theta)$$

$$= \frac{b \cos \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}}{-a \sin \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}}(x - a \cos \theta)$$

$$(அ-ஆ) \quad (y - b \sin \theta) a \sin \frac{\theta + \phi}{2} \\ = -(x - a \cos \theta) b \cos \frac{\theta + \phi}{2}$$

$$(அ - ஆ) \quad bx \cos \frac{\theta + \phi}{2} + ay \sin \frac{\theta + \phi}{2} \\ = ab \left[\sin \theta \sin \frac{\theta + \phi}{2} + \cos \theta \cos \frac{\theta + \phi}{2} \right] \\ = ab \cos \left(\theta - \frac{\theta + \phi}{2} \right) \\ = ab \cos \frac{\theta - \phi}{2}$$

இது பக்கவாட்டுச் சை-ஆஸ் வகுப்பின்,

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta + \phi}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} = \cos \frac{\theta - \phi}{2} \quad \dots (B)$$

எனவே, நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் மீதுள்ள $P(\theta)$, $Q(\phi)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நான்,

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta + \phi}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} = \cos \frac{\theta - \phi}{2}$$

7.17. தன் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -க்கு $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

தன் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இல் $P(\theta)$, $Q(\phi)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் தான்,

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta + \phi}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} = \cos \frac{\theta - \phi}{2} \quad (1)$$

Q புள்ளி P புள்ளியை நெருங்கி, வடிவில் அதனுடன் பொருத்தும் பொழுது, PQ நான் P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடாகும்.

எனவே, சமன்பாடு (1)-இல் $\phi = \theta$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta + \theta}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \theta}{2} = \cos \frac{\theta - \theta}{2}$$

$$(அ-அ) \quad \frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = \cos \theta = 1.$$

$\therefore P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1.$$

7.18. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தன் வட்டத்திற்கு $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

தன் வட்டத்திற்கு $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு.

$$\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1.$$

இதன் சரிவு,

$$= - \frac{b \cos \theta}{a \sin \theta}$$

∴ செங்கோட்டில் சமையு,

$$= \frac{a \sin \theta}{b \cos \theta}.$$

எனவே, $P(\theta)$ புள்ளியிலேத்துச் செங்கோடு,

$$y - b \sin \theta = \frac{a \sin \theta}{b \cos \theta} (x - a \cos \theta)$$

$$by \cos \theta - b^2 \sin \theta \cos \theta = ax \sin \theta - a^2 \sin \theta \cos \theta.$$

$$(அ-து) \quad ax \sin \theta - by \cos \theta = (a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta.$$

இரு பக்கமும் $\sin \theta \cos \theta$ -வால் வகுக்க,

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2.$$

எனவே, $P(\theta)$ புள்ளியிலேத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2.$$

7.18. θ, ϕ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

நீள் வட்டத்திற்கு θ, ϕ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள்,

$$\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1 \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{x}{a} \cos \phi + \frac{y}{b} \sin \phi = 1 \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ஐ விடுவியின் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி கிடைக்கப் பெறும்.

(1)-ஐ $\sin \phi$ -வால் பெருக்க,

$$\frac{x}{a} \cos \theta \sin \phi + \frac{y}{b} \sin \theta \sin \phi = \sin \phi \quad \dots \quad (3)$$

(2)-ஐ $\sin \theta$ -வால் பெருக்க.

$$\frac{x}{a} \cos \theta \sin \theta + \frac{y}{b} \sin \theta \sin \theta = \sin \theta \quad \text{--- (4)}$$

(3)-இலிருந்து (4)-ஐக் கழிப்பின்,

$$\frac{x}{a} [\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta] = \sin \theta - \sin \theta$$

$$\text{(அ-து)} \quad \frac{x}{a} \sin (\theta - \theta) = 2 \sin \frac{\theta + \theta}{2} \cos \frac{\theta - \theta}{2}$$

$$\therefore x = \frac{2a \sin \frac{\theta - \theta}{2} \cos \frac{\theta + \theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta - \theta}{2} \cos \frac{\theta - \theta}{2}}$$

$$\text{(அ-து)} \quad x = \frac{a \cos \frac{\theta + \theta}{2}}{\cos \frac{\theta - \theta}{2}}$$

$$\text{இவ்வாறே } y = \frac{b \sin \frac{\theta + \theta}{2}}{\cos \frac{\theta - \theta}{2}}$$

எனவே, θ, ϕ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டுப் புள்ளி,

$$\left[\frac{a \cos \frac{\theta + \phi}{2}}{\cos \frac{\theta - \phi}{2}}, \frac{b \sin \frac{\theta + \phi}{2}}{\cos \frac{\theta - \phi}{2}} \right].$$

மாநிதீ 8: தீர் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் θ, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் தாள் ஒரு குவியல் வழிச் செவ்வின்,

$$\tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\phi}{2} = \frac{e-1}{e+1} \text{ என நிறைவு.}$$

0, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் தாண்,

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta + \phi}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} = \cos \frac{\theta - \phi}{2}.$$

இது ஜனியம் $S(ae, 0)$ வழிச் செலவின்,

$$e \cos \frac{\theta + \phi}{2} = \cos \frac{\theta - \phi}{2}.$$

$$(அ - இ) \quad e = \frac{\cos \frac{\theta - \phi}{2}}{\cos \frac{\theta + \phi}{2}}$$

$$\therefore \frac{e - 1}{e + 1} = \frac{\cos \frac{\theta - \phi}{2} - \cos \frac{\theta + \phi}{2}}{\cos \frac{\theta - \phi}{2} + \cos \frac{\theta + \phi}{2}}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2}}$$

$$= \tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\phi}{2}.$$

மாதிரி 9: $(\theta - \phi)$ ஒரு மாநிலப்பெணின், 0, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் தாண் ஒரு திசையான நீள் வட்டத்தின் தொடுகோட்டாகுமென திறவுக.

0, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் தாண்,

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta + \phi}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} = \cos \frac{\theta - \phi}{2}.$$

$\theta - \phi = 2c$ (மாநில) எனில்,

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta + \phi}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} = \cos c.$$

$\theta + \phi = 2\psi$ எனில்,

$$\frac{x}{a} \cos \psi + \frac{y}{b} \sin \psi = \cos c$$

$$(அ.அ) \quad \frac{x}{a \cos c} \cos \psi + \frac{y}{b \cos c} \sin \psi = 1.$$

இக்கோடு $\frac{x^2}{a^2 \cos^2 c} + \frac{y^2}{b^2 \cos^2 c} = 1$ என்ற மெய்யான நீள் வட்டத்தைத் தோடும்.

மாதிரி 10 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் P புள்ளிக்கு அதன் துணை வட்டத்தின் Q புள்ளி ஒத்த புள்ளி எனில், இய்விரு புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

P, Q புள்ளிகள் ஒத்த புள்ளிகளெனில், அவைகளின் ஆயத் தொலைகள் மூன்றாயே,

$(a \cos \theta, b \sin \theta), (a \cos \theta, a \sin \theta)$ ஆகும்.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -க்கு P விடத்துச் செங்கோடு,

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2 \quad \dots \quad (1)$$

துணைவட்டம் $x^2 + y^2 = a^2$ -க்கு Q -விடத்துச் செங்கோடு,

$$\frac{x}{\cos \theta} - \frac{y}{\sin \theta} = 0 \quad \dots \quad (2)$$

இரண்டும் வெட்டும் புள்ளிகள் $R(x_1, y_1)$ எனில்,

$$\frac{ax_1}{\cos \theta} - \frac{by_1}{\sin \theta} = a^2 - b^2 \quad \dots \quad (3)$$

$$\frac{x_1}{\cos \theta} - \frac{y_1}{\sin \theta} = 0 \quad \dots \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4)-இல் θ -வை நீக்கினால் R -இன் இயங்கு வழி கிடைக்கப்பெறும்.

$$(4) \text{--இருந்து } \frac{x_1}{\cos \theta} = \frac{y_1}{\sin \theta} = \sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}.$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{\mu_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}$$

இம் மதிப்புக்களை (8)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{ax_1}{\lambda_1} \sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2} - \frac{by_1}{\mu_1} \sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2} = a^2 - b^2.$$

$$(அ-அ) \quad (a-b) \sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2} = a^2 - b^2.$$

இருபக்கமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$(a-b)^2 (\lambda_1^2 + \mu_1^2) = (a^2 - b^2)^2.$$

எனவே, $R(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயற்கு வரீ,

$$\lambda^2 + \mu^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{a-b} \right)^2$$

$$(அ-அ) \quad x^2 + y^2 = (a+b)^2.$$

மாதிரி 11: $lx + my + n = 0$ அகலது $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ எனும் கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர்வு வட்டத்தின் செங்கோடாக அளவயத் தேவைவரான கட்டுப்பாடு காண்க.

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad \dots \quad (1)$$

தீர்வு வட்டத்திற்கு θ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு எனக் கொள்வோம்.

θ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு.

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2 \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{\cos \alpha}{\cos \theta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{p}{a^2 - b^2},$$

$$\therefore \frac{\cos \theta \cos \alpha}{a} = - \frac{\sin \theta \sin \alpha}{b} = \frac{p}{a^2 - b^2}.$$

$$\text{எனவே, } \cos \theta = \frac{ap}{(a^2 - b^2) \cos \alpha}$$

$$\sin \theta = \frac{-bp}{(a^2 - b^2) \sin \alpha}.$$

$$\therefore 1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$= \frac{a^2 p^2}{(a^2 - b^2)^2 \cos^2 \alpha} + \frac{b^2 p^2}{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 \alpha}$$

$$(25-26) \quad \frac{a^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{b^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{p^2} \quad \dots (8)$$

$lx + my + n = 0$ செங்கோட்டையில்,

$$l = \cos \alpha, \quad m = \sin \alpha, \quad n = -p.$$

எனவே கட்டுப்பாடு (8)

$$\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2} \quad \text{என்றாகும்.}$$

பயிற்சி 71.

- ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியம் $(3, -1)$, ஒத்த இயக்கு வரை $x - y + 13 = 0$, மையத் தொலை விகிதம் $\frac{1}{2}$ எனில், அதன் சமன்பாடு காண்க.
- ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியம் $(1, 2)$, ஒத்த இயக்கு வரை $2x - 3y + 5 = 0$, மையத் தொலை விகிதம் $\frac{2}{3}$ எனில் அதன் சமன்பாடு காண்க.
- ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியம் $(4, 0)$, ஒத்த இயக்கு வரை $4x - 2y = 0$, மையத் தொலை விகிதம் $\frac{4}{5}$ எனில் அதன் சமன்பாடு காண்க.

4. ஆகவகளை ஆரக்ககளாகக் கொண்ட ஒரு தீள் வட்டத்தின் குவியங்கள் $\left(0, \frac{\sqrt{15}}{18}\right)$, $\left(0, -\frac{\sqrt{15}}{18}\right)$, மையத்தொலைவில்தம் $\frac{\sqrt{5}}{3}$ எனின், தீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

5. கீழ்க்காணும் தீள் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளிலிருந்து, அவைகளின் மையத்தொலைவில்தம், குவியம் செவ்வகம் காண்க.

(i) $4(x-1)^2 + 9y^2 = 4$

(ii) $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 118 = 0$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$,

(iv) $(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 81$.

6. $9x^2 + 16y^2 = 144$ தீள் வட்டத்திற்கு $(0, 3)$ புள்ளியில்தது வரையும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீள் வட்டத்து முனைகளான A, A' புள்ளிகளில்ததுத் தொடுகோடுகளை P புள்ளியில்ததுத் வரையும் தொடுகோடு Q, R புள்ளிகளில் சந்திப்பின், $AQ \cdot A'R = b^2$ என நிறுவுக.

8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீள் வட்டத்திற்குத் குவியங்கள், முனைகள், மையம் இவைகளிலிருந்து வரையும் செவ்வகத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே $l, l'; m, m'; e$ எனின், $ll' - e^2 = c^2(mm' - e^2)$ என நிறுவுக.

9. ஒரு தீள் வட்டத்து PQ நாண் தீள் வட்டத்தின் மையத்தில்த ஏதும் கோணம் 90° எனின், P, Q புள்ளிகளில்ததுத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள்தம் இவங்கு வழி, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ என நிறுவுக.

10. ஒரு தீள் வட்டத்துக் குவிய நானின் முனைகளின் துணை வட்டக் கோணங்கள் θ, ϕ எனின் $\cos \frac{\theta+\phi}{2} = e \cos \frac{\theta-\phi}{2}$ என நிறுவுக.

11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தில் θ , ϕ புள்ளிகள் செங்குத்தாகும் தான் $(a, 0)$ புள்ளியில் ஏற்றும் கோணம் 90° எனில் $\tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\phi}{2} = -\frac{b^2}{a^2}$ என நிறுவുക.
12. $\frac{x^2}{1+a} + \frac{y^2}{b} = 1$ நீள் வட்டத்தில் θ புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு நீள் வட்டத்தை மீண்டும் 2θ கோணத்தில் வெட்டினால், $\cos \theta = -\frac{b}{a}$ என நிறுவുക.
13. அச்சக்கனுடன் சமகோணத்தை ஏற்கும் நீள் வட்டத்தின் செங்கோடு, அச்சக்கனுடன் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{(a^2-b^2)^3}{2(a^2+b^2)}$ என நிறுவுக.
14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்திற்கு P புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு சிற்றச்சை Q புள்ளியில் சந்திக்கிறது. S, S' குவியங்கள் எனில், $PQ^2 - SQ^2 = SP \cdot S'P$ என நிறுவுக.
15. ஒரு நீள் வட்டத்தின் செங்கோட்டு தான் பேரச்சுடன் ஏற்படுக்கும் கோணம் 45° எனில், அந்தவழியில் நீளம் $\frac{4\sqrt{2} a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$ என நிறுவுக.
16. P, Q எவ்வகை, நீள் வட்டம், ஆகிய துணை வட்டம் ஆகியவைகள் மீதுள்ள ஒத்த புள்ளிகள் C நீள் வட்ட மையம். CQ -யின் நீட்டம் $x^2 + y^2 = 4(a+b)^2$ வட்டத்தை R -இல் சந்திக்குமெனில், PR கோடு $\frac{x^2}{(2a+b)^2} + \frac{y^2}{(2b+a)^2} = \frac{4}{9}$ நீள் வட்டத்தின் செங்கோடு என நிறுவுக.
17. ஒரு நீள் வட்டத்தினுள் வரையப்படும் ஒரு நாற்கரத்தின் மூன்று பக்கங்கள் பேரச்சுடன் நிலைத்த கோணங்களைப் பிறப்பிக்கும் எனில், நான்காவது பக்கமும் அதனுடன் நிலைத்த கோணம் பிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.
18. S, S' என்ற ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியங்கள், நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள P என்ற வரையிலும் ஒரு புள்ளி

புடின் அமைக்கும் PSS' என்ற முக்கோணத்தின் உள் வட்ட மையத்தின் இயங்கு வழி மத்தொரு தீர் வட்டம் என நிறுவுக.

19. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தின் தொடுகோடு ஆவல் கனாடல் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டுகள் l_1, l_2 எனின்,

$$\frac{x^2}{l_1^2} + \frac{y^2}{l_2^2} = 1 \text{ என நிறுவுக.}$$

20. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தின் தொடுகோடு ஆவக்களை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினும், PQ -யின் நடுப் புள்ளியின் இயங்கு வழி யாது?

21. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, தீர் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தொடுகோடெனின், $p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha$ என நிறுவுக.

22. $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ வளைவிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகள் ஆவத்தடல் நிரப்புக் கோணங்கள் (complementary angles) சிறப் பிக்கும் என நிறுவுக.

23. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தின் செவ்வகமம் தன் நுனியிலேத்துச் செங்கோடு, பேரக்கை ($ac^2, 0$) புள்ளியில் சத்திக்கும் என நிறுவுக. இச் செங்கோடு சிறத்தின் நுனியவழிச் செவ்வின் $e^4 + e^2 = 1$ என நிறுவுக.

24. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தின் பேரச்சிம் P புள்ளியிலிருந்து தீர் வட்டம், அதன் நுனை வட்டம் ஆகியவை கனாக்கு வரையும் தொடுகோடுகள் அமைக்கை Q, R புள்ளிகளில் தொடுமெனின், QR கோடு பேரச்சிற்றிற் செங்குத்தாய் அமைவும் என நிறுவுக.

25. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தில் α, β புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நான் பேரக்கை ($d, 0$) புள்ளியில் சத்திக்கு மெனின்,

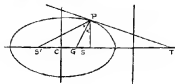
$$\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{d-a}{d+a} \text{ என நிறுவுக.}$$

வினாக்கள்

1. $7x^2 + 2xy + 7y^2 - 80x + 48y - 176 = 0$.
2. $(x^2 + y^2 - 8x - 4y + 5)^2 = \frac{4}{18} (8x - 3y + 6)^2$.
3. $8x^2 + 26y^2 = 226$. 4. $9x^2 + 4y^2 = 36$.
5. (i) $\frac{1}{2}$, $(1, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\sqrt{3}$; (ii) $\frac{4}{5}$, $(\pm 5, 2)$, $\frac{6}{5}$;
 (iii) $\frac{\sqrt{5}}{8}$, $(\pm \sqrt{5} - 1, -2)$, $\frac{8}{3}$; (iv) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$, $(1 \pm \sqrt{2}, 2)$,
 $\frac{4}{3}$. 6. $y - 3 = 0$. 20. $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 4$.

7.20. நீள் வட்டத்தின் பண்புகள் (Properties)

1. ஒரு நீள் வட்டத்திற்கு P புள்ளியிலிருந்து தொடுகோளும், செங்கோளும் அம்புள்ளியை குறுகத் தூரங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் மையமெடுக்கலாகும்.



படம் 67

$$\text{நீள் வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து தொடுகோளும் செங்கோளும், x ஆயத்தை மூன்றாய் T, G புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன எனக் கொள்வோம்.

P புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு

$$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2, \quad \dots \quad (1)$$

G -யின் ஆயத்தொலைவு பூச்சியமெனில், சமன்பாடு (1)-இல் $y = 0$ எனப் பிரதியிடுவர், $x = (a^2 - b^2) \frac{x_1}{a^2}$.

$$\text{எனவே, } G\text{-யின் ஆயத்தொலைகள் } \left[\frac{(a^2 - b^2)x_1}{a^2}, 0 \right]$$

$$(அ-து) \quad [e^2c_1, 0].$$

S, S' குவியங்களினால் அமைவதன் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0), (-ae, 0)$.

$$S'G = S'C + CG = ae + e^2x_1 = e(x_1e + a).$$

$$GS = CS - CG = ae - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 = ae - e^2x_1 = e(a - ex_1).$$

$$S'P = a + ex_1 \quad \dots \quad [\text{பத்தி 7-B}]$$

$$SP = a - ex_1 \quad \dots \quad [\text{பத்தி 7-B}],$$

$$\therefore \frac{S'P}{SP} = \frac{S'G}{GS}.$$

எனவே, P புள்ளியிலுத்துச் செங்கோடு PG -யும், P புள்ளியிலுத்துத் தொடுகோடு PT -யும் $S'PS$ -இன் இருசமவெட்டிகளாகும். $[\because PG \perp PT]$

2. குவிய நானின் தூண் விட்டத்துத் தொடுகோடுகள் இவர்க்கு வரையின் மீது செங்கோடும்.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ நீள்வட்டத்தில்,}$$

' θ ', ' ϕ ' புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta + \phi}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} = \cos \frac{\theta - \phi}{2}.$$

இக் கோடு குவிய நான் எனில், $S(ae, 0)$ என்ற குவியம் வழிச் செல்லும்.

$$\therefore e \cos \frac{\theta + \phi}{2} = \cos \frac{\theta - \phi}{2} \quad \dots \quad (1)$$

9. ϕ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1 \quad \dots \quad (2)$$

$$\frac{x}{a} \cos \phi + \frac{y}{b} \sin \phi = 1 \quad \dots \quad (3)$$

இவ்விரு தொடுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளி

$$\left(a \frac{\cos \frac{\theta + \phi}{2}}{\cos \frac{\theta - \phi}{2}}, b \frac{\sin \frac{\theta + \phi}{2}}{\cos \frac{\theta - \phi}{2}} \right) \quad [\text{பத்தி 7-10}]$$

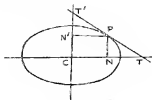
$$\begin{aligned} \therefore x &= a \frac{\cos \frac{\theta + \phi}{2}}{\cos \frac{\theta - \phi}{2}} = \frac{a \cos \frac{\theta + \phi}{2}}{e \cos \frac{\theta - \phi}{2}} \quad [\because (1)] \\ &= \frac{a}{e}, \end{aligned}$$

எனவே, தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $x = \frac{a}{e}$ என்ற இடக்கு வரையின் மீதமையும்.

3. நம் கட்டத்திற் P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு போதகை T புள்ளியிலும், செந்தகை T' புள்ளியிலும் வெட்டுபெறு. P -யிலிருந்து அச்சக்காணுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு கன்தம் ஆகப் புள்ளிகள் N, N' எனின்,

$$(i) \quad CN \cdot CT = a^2$$

$$(ii) \quad CN' \cdot CT' = b^2 \text{ ஆகும்.}$$



படம் 88.

தீர்வு வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனவும், P -யின் ஆயத் தொலைகள் $a \cos \theta$, $b \sin \theta$ எனவும் கொள்வோம்.

P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1 \quad \dots (1)$$

T புள்ளியின் y ஆயத்தொலைவு முச்சியமாதலின் சமன்பாடு (1)-யில், $y = 0$ எனப் பிரதிநிதிப்படுத்துக.

$$x = \frac{a}{\cos \theta} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore T \text{ புள்ளியின் ஆயத்தொலைவுகள் } \left[\frac{a}{\cos \theta}, 0 \right]$$

T' புள்ளியின் x ஆயத்தொலைவு முச்சியமாதலின், சமன்பாடு (1)-இல் $x = 0$ எனப் பிரதிநிதிப்படுத்துக,

$$y = \frac{b}{\sin \theta} \text{ ஆகும்.}$$

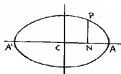
$$\therefore T' \text{ புள்ளியின் ஆயத்தொலைவுகள் } \left[0, \frac{b}{\sin \theta} \right].$$

$$\text{எனவே, } CN \cdot CT = a \cos \theta \cdot \frac{a}{\cos \theta} = a^2.$$

$$CN' \cdot CT' = b \sin \theta \cdot \frac{b}{\sin \theta} = b^2.$$

4. தீர்வு வட்டத்தின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி P -யிலிருந்து பேரக்கக்கு வரையும் செங்குத்துக்கோட்டின் அடிப்புள்ளி N . A , A' புள்ளிகளே பேரச்சின் துருவங்களின்,

$$\frac{PN^2}{A'N \cdot NA} = \frac{b^2}{a^2} \text{ என நிறுவுக.}$$



படம் 38(a)

P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (CN, NP) . P புள்ளி தன் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் மீதமைவதால்,

$$\frac{CN^2}{a^2} + \frac{NP^2}{b^2} = 1.$$

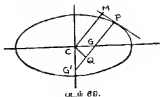
$$\begin{aligned} \therefore \frac{NP^2}{b^2} &= 1 - \frac{CN^2}{a^2} \\ &= \frac{a^2 - CN^2}{a^2} \\ &= \frac{CA^2 - CN^2}{a^2} \\ &= \frac{(CA+CN)(CA-CN)}{a^2} \\ &= \frac{A'N \cdot NA}{a^2}. \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{PN^2}{A'N \cdot NA} = \frac{b^2}{a^2}.$$

5. தன் வட்டத்தின் P புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு போக்கையும், சிற்றச்சையும் மூன்றாவது G, G' புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. தன் வட்ட மையம் C -யிலிருந்து இச்செங்கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி Q எனில்,

$$PQ \cdot PG' = a^2$$

$$PQ \cdot PG = b^2 \quad \text{என்கருது.}$$



நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனவும், P புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகள் $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ எனவும் கொள்வோம்.

P புள்ளியிலேத்துத் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2 \quad \dots \quad (1)$$

G புள்ளியின் x ஆயத்தொலைவு பூச்சியமாதலின், சமன்பாடு (1)-இல் $y = 0$ எனப் பிரதியிடுக,

$$x = \frac{(a^2 - b^2) \cos \theta}{a},$$

எனவே, G -யின் ஆயத்தொலைவுகள் $\left[\frac{a^2 - b^2}{a} \cos \theta, 0 \right]$

G' புள்ளியின் x ஆயத்தொலைவு பூச்சியமாதலின் சமன்பாடு (1)-இல் $x = 0$ எனின்,

$$y = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin \theta.$$

$\therefore G'$ -யின் ஆயத்தொலைவுகள் $\left[0, -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin \theta \right]$

P புள்ளியிலேத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1 \quad \dots \quad (2)$$

$PQ = CM = C(0, 0)$ -த்திலேத்து கோடு (2)-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}}$$

$$\begin{aligned} PG &= \sqrt{\left\{ a \cos \theta - \frac{a^2 - b^2}{a} \cos \theta \right\}^2 + b^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{\left(\frac{b^2 \cos \theta}{a} \right)^2 + b^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

$$= \frac{b}{a} \sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}$$

$$PG' = \sqrt{\left\{ a^2 \cos^2 \theta + \left[b \sin \theta + \frac{a^2 - b^2}{b} \sin \theta \right]^2 \right\}}$$

$$= \sqrt{\left[a^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{a^2 \sin \theta}{b} \right)^2 \right]}$$

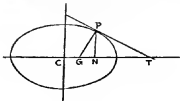
$$= \frac{b}{a} \sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}.$$

$$\therefore PQ \cdot PG' = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \cdot \frac{a}{b} \sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} \\ = a^2.$$

$$PQ \cdot PG = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \cdot \frac{b}{a} \sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} \\ = b^2.$$

7.21. தொடுகோட்டி (Tangent), செங்கோட்டி (Sub-normal)

நிலைட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனவும், அதன் மீதுள்ள P புள்ளியின் ஆயத்தொலைவை (x_1, y_1) எனவும் கொள்க, P -யிலிருந்து தொடுகோட்டும், செங்கோட்டும் x -ஆயத்தை மூன்றையே T, G புள்ளிகளில் சந்திக்கட்டும். x -ஆயத்திலிருந்து செங்குத்தாக P -யிலிருந்து PN என்ற கோடு வரப்படும்.



NT தொடுகோட்டடி (subtangent), GN வளரசெங்கோட்டடி (subnormal) எனப்படும்.

P புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

T புள்ளியின் y ஆயத்தொலை பூச்சியமாதின், சமன்பாடு (1)-இல், $y=0$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$x = \frac{a^2}{x_1} \text{ என்றாகும்.}$$

எனவே, T -யின் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$.

P புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு,

$$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2, \quad \dots \quad (2)$$

G புள்ளியின் y ஆயத்தொலை பூச்சியமாதின், சமன்பாடு (2)-இல், $y = 0$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, G -யின் ஆயத்தொலைகள் $\left[\frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1, 0\right]$.

தொடுகோட்டடி NT -யின் நீளம்

$$= CT - CN = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$$

வளர செங்கோட்டடி GN -இன் நீளம்

$$= CN - CG = x_1 - \frac{x_1(a^2 - b^2)}{a^2} = \frac{b^2 x_1}{a^2}$$

7-22. குறித்த புள்ளியிலிருந்து தீர்வட்டத்திற்கு நான்கு செங்கோடுகள் வரையலாம். இக் செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள்தம் துணை வட்டக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை π -யின் ஒரே மடங்காகும்.

கொடுத்துள்ள புள்ளி (x_1, y_1) எனக்கொள்வோம். தீர்வட்டத்திற்கு $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2 \quad \dots \quad (1)$$

இது (x_1, y_1) புள்ளியைத் செல்லின்,

$$\frac{ax_1}{\cos \theta} - \frac{by_1}{\sin \theta} = a^2 - b^2 \quad \dots \quad (2)$$

$$(அ-அ) \quad \frac{ax_1}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{by_1}{2 \tan \frac{\theta}{2}} = a^2 - b^2.$$

$$\frac{ax_1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{by_1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \text{ எனின்,}$$

$$\frac{ax_1(1+t^2)}{(1-t^2)} - \frac{by_1(1+t^2)}{2t} = (a^2 - b^2) = a^2 e^2.$$

$$(அ-அ) \quad ax_1(1+t^2)2t - by_1(1+t^2)(1-t^2) = 2t(1-t^2)a^2 e^2$$

$$(அ-அ) \quad by_1 t^2 + 2(ax_1 + a^2 e^2)t^3 + 2(ax_1 - a^2 e^2)t - by_1 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

இது t -யின் நான்காம் சமன்பாடாகனின், $t \tan \frac{\theta}{2}$ நான்கு மதிப்புகள் பெற்றிருக்கும்.

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \text{ ஆகனின்}$$

$$\theta = 2 \tan^{-1}(t)$$

$$\therefore \theta = 2 \pi + 2 \tan^{-1}(t)$$

எனவே, $t = \tan \frac{\theta}{2}$ -இன் ஒரு மதிப்புக்கு நீள் வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியும் கிடைக்கப் பெறும். $\tan \frac{\theta}{2}$ -இன் நான்கு மதிப்புகளுக்கும் நீள் வட்டத்தில் நான்கு புள்ளிகள் கிடைக்கப்பெறும். இவை மெய் அல்லது கற்பனைப் புள்ளிகள் ஆளும்.

எனவே, நீள் வட்டத்திற்கு இப்புள்ளிகளிடத்து வரையச் செங்கோடுகள் நான்கும் (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும். (அ-து) (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு நான்கு செங்கோடுகள் வரையக்கூடும்.

சமன்பாடு (8)-இன் தீர்வுகள் $t_1 = \tan \frac{\theta_1}{2}$, $t_2 = \tan \frac{\theta_2}{2}$, $t_3 = \tan \frac{\theta_3}{2}$, $t_4 = \tan \frac{\theta_4}{2}$ எனின்,

$$S_1 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -\frac{2(ax_1 + a^2e^2)}{by_1} \quad \dots \quad (4)$$

$$S_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_3t_4 = 0 \quad \dots \quad (5)$$

$$S_3 = t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_2t_3t_4 + t_1t_3t_4 = -\frac{2'ax_1 - a^3e^2}{by_1} \quad (6)$$

$$S_4 = t_1t_2t_3t_4 = -1 \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

$$\tan \left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2} + \frac{\theta_4}{2} \right) = \frac{S_1 - S_2}{1 + S_2 - S_4},$$

$$S_1 - S_2 \neq 0, \quad 1 + S_2 - S_4 = 0.$$

$$\therefore \tan \left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} \right) = \infty,$$

$$(அ - து) \quad \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$(அ - து) \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = (2n + 1)\pi$$

எனவே, அடிப்புள்ளிகளின் துணைவட்டக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை π -இன் ஒத்த மடங்காகும்.

7.23. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தில் மூன்று புள்ளிகளின் தொலைபட்டக் கோணங்கள் $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. இப்புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரு புள்ளியைச் செல்வின், $\sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin(\theta_3 + \theta_1) = 0$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (x_1, y_1) புள்ளியைச் செல்வின், இப்புள்ளியைச் செல்லும் நேர்காவது செங்கோட்டின் அடிப்புள்ளி θ_4 எனக் கொள்வோம்.

பத்தி 7.22-இல் சமன்பாடுகள் (5), (7)-இன் படி,

$$S_3 = x \tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$S_4 = \tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} \tan \frac{\theta_3}{2} \tan \frac{\theta_4}{2} = -1 \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-இனிலுந்து θ_4 -ஐ நீக்கி,

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} + \tan \frac{\theta_2}{2} \tan \frac{\theta_3}{2} + \tan \frac{\theta_3}{2} \tan \frac{\theta_1}{2} \\ = \left(\frac{1}{\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} \tan \frac{\theta_3}{2}} \right) \\ \left(\tan \frac{\theta_1}{2} + \tan \frac{\theta_2}{2} + \tan \frac{\theta_3}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

இதைச் சுருக்கி,

$$2 \left[\tan \frac{\theta_1}{2} + \tan \frac{\theta_2}{2} - \cot \frac{\theta_1}{2} \cot \frac{\theta_2}{2} \right] = 0.$$

$$(அ - நு) \quad 2 \frac{\cos^2 \frac{\theta_1}{2} \cos^2 \frac{\theta_2}{2} - \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \sin^2 \frac{\theta_2}{2}}{\sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2}} = 0.$$

$$(அ - நு) \quad 2 \frac{\cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} = 0.$$

$$(அ - து) \quad \Sigma \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} = 0.$$

$$(அ - து) \quad \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} + \frac{\cos \theta_2 + \cos \theta_3}{\sin \theta_2 \sin \theta_3} + \frac{\cos \theta_3 + \cos \theta_1}{\sin \theta_3 \sin \theta_1} = 0.$$

$$(அ - து) \quad \sin \theta_2 (\cos \theta_1 + \cos \theta_3) + \sin \theta_1 (\cos \theta_2 + \cos \theta_3) + \sin \theta_3 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) = 0.$$

$$\therefore \sin (\theta_1 + \theta_2) + \sin (\theta_2 + \theta_3) + \sin (\theta_3 + \theta_1) = 0.$$

7.24. ஒரு வட்டம் நீள் வட்டம் ஒன்றை தாக்கு புள்ளிகளில் வெட்டும். அவற்றின் துணை வட்டக் கோணங்களும் கூட்டுத் தொகை π -இன் இரட்டை மடங்காகும்

$$\text{நீள் வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{வட்டம் } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (2).$$

நீள் வட்டத்தில் யாதெனும் ஒரு புள்ளி $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ எனக்கொள்வோம்.

சமன்பாடு (2)-இல், $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ எனப் பிரதிபலித்து, (1), (2) வெட்டும் புள்ளிகளின் துணை வட்டக் கோணங்கள் விடைக்கப்படும்.

$$(a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2 + 2g(a \cos \theta) + 2f(b \sin \theta) + c = 0.$$

$$(அ-து) \quad a^2 \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \right)^2 + b^2 \left(\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \right)^2 + 2ga \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \right) + 2fb \left(\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \right) + c = 0.$$

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \text{ எனின்,}$$

$$a^2 \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^2 + b^2 \left(\frac{2t}{1 + t^2} \right)^2 + 2ga \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) + 2fb \left(\frac{2t}{1 + t^2} \right) + c = 0.$$

இதைச் சுருக்கி,

$$(a^2 + c - 2bg)t^4 + 4bft^3 + 2(c + 2b^2 - a^2)t^2 + 4bft + (c + a^2 + 2bg) = 0 \quad \dots (3)$$

இது t -யில் நான்காம் சமன்பாடாகியது. t -யிக்கு மெய் அல்லது சற்பனை மதிப்புகள் நான்கு உண்டு. அவைகள் t_1, t_2, t_3, t_4 எனக்கொண்டால், அதை ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு புள்ளியை மட்டும் குறிக்கும்.

எனவே, ஒரு வட்டம் தன் வட்டம் ஒன்றை நான்கு புள்ளிகளில் (மெய் அல்லது சற்பனை) வெட்டும்.

மேலும்,

$$S_1 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{-4bf}{a^2 + c - 2bg} \quad \dots (4)$$

$$S_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_3t_4 = \frac{2(c + 2b^2 - a^2)}{a^2 + c - 2bg} \quad (5)$$

$$S_3 = t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = \frac{-4bf}{a^2 + c - 2bg} \quad (6)$$

$$S_4 = t_1t_2t_3t_4 = \frac{c + a^2 + 2bg}{a^2 + c - 2bg} \quad \dots \dots = (7)$$

$$\tan\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2} + \frac{\theta_4}{2}\right) = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2 + S_4}$$

$$1 - S_2 + S_4 \neq 0, \quad S_1 - S_3 = 0,$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2}\right) = 0,$$

$$\text{எனவே, } \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} = n\pi \quad (n \text{ வட்டமன்})$$

$$(அது) \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2n\pi,$$

$$= \pi - \text{இன் இரட்டை மடங்கு}$$

4-25. ஒரு வட்டம் தன் வட்டம் ஒன்றை P, Q, R, S புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடும், மற்ற இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடும் X ஆயத்தடையாக சமவெக்து கோணங்கூக்கும்.

$$\text{தன் வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots (1)$$

$$\text{வட்டம் } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (2)$$

வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q, R, S எனவும், ஆய்வகளின் துணைவட்டக் கோணங்கள் $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ எனவும் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} PQ\text{-வின் சரிவு} &= \frac{b \sin \theta_1 - b \sin \theta_2}{a \cos \theta_1 - a \cos \theta_2} \\ &= \frac{2b \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}}{-2a \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} \\ &= -\frac{b}{a} \cot \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{இவ்வாறே } RS\text{-இன் சரிவு} = -\frac{b}{a} \cot \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore PQ\text{-வின் சரிவு} &= -\frac{b}{a} \cot \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \\ &= -\frac{b}{a} \cot \left(\pi - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2} \right) \\ &= \frac{b}{a} \cot \frac{\theta_3 + \theta_4}{2} \\ &= RS\text{-இன் சரிவு.} \end{aligned}$$

$\therefore PQ, RS$ கோடுகள் x ஆயத்தொடர் சமச்சாய்வு கோண் அடுக்கும்.

நிதிதொகு முறை :

$$\left. \begin{aligned} PQ\text{-வின் சமன்பாடு } l_1x + m_1y + n_1 &= 0 \\ RS\text{-இன் சமன்பாடு } l_2x + m_2y + n_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (1)$$

$$\text{நீள்வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

(1), (2) வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வரையின் சமன்பாடு

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \lambda (l_1x + m_1y + n_1)(l_2x + m_2y + n_2) = 0$$

xy -யின் கெட்டு பூச்சியமெனில், இஃது ஒரு வட்டமாகும்.

$$\therefore \lambda(I_1 m_2 + I_2 m_1) = 0.$$

$$\lambda \neq 0, \quad \therefore I_1 m_2 + I_2 m_1 = 0$$

$$(அ-அ) \quad \frac{I_1}{m_1} = -\frac{I_2}{m_2}.$$

எனவே, λ -வின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்

$$PQ\text{-வின் சரிவு} = -RS\text{-இன் சரிவு.}$$

(அ-அ) PQ , RS கோடுகள் x ஆகாத்துடன் சமச் சரிவு கொண்டிருக்கும்.

மாதிரி 12: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ திசு வட்டத்தில் (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் செல்வின்,

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \left(-\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_4} \right) = 4$$

என திறவுக.

(x_1, y_1) புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2.$$

இது (h, k) புள்ளியிற் செல்வின்,

$$\frac{a^2 h}{x_1} - \frac{b^2 k}{y_1} = a^2 - b^2.$$

$$(அ-அ) \quad a^2 h y_1 - b^2 k x_1 = (a^2 - b^2) x_1 y_1$$

$$(அ-அ) \quad a^2 y_1 (h - x_1) = b^2 x_1 (k - y_1)$$

$$(அ-அ) \quad y_1 [a^2 (h - x_1) + b^2 x_1] = b^2 k x_1 \quad \dots \quad (1)$$

(x_1, y_1) புள்ளி திசு வட்டத்தின் மீதுள்ளதால்,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

$$(அ-அ) \quad y_1^2 = \frac{b^2(a^2 - x_1^2)}{a^2} \quad \dots \quad (2)$$

(2)-ஐ (1)-இல் பிரதியிடுக.

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2} [a^2(h - x_1) + b^2 x_1] = b^2 h x_1.$$

இதை வர்க்கப்படுத்தினால்,

$$\frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_1^2) [a^2(h - x_1) + b^2 x_1]^2 = b^4 h^2 x_1^2.$$

இதைச் சுருக்கின்,

$$(a^2 - b^2)^2 x_1^4 - 2a^2 h(a^2 - b^2)x_1^3 - [a^2 \{ (a^2 - b^2)^2 - a^2 h^2 - b^4 h^2 \}] x_1^2 + 2a^2 h(a^2 - b^2)x_1 - a^2 h^2 = 0 \quad (8)$$

இன்று ஒரு நேரியல் சமன்பாட்டதலின், ந்கு நான்கு மதிப்புகள் உண்டு. அவைகள் x_1, x_2, x_3, x_4 எனின்,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{2a^2 h(a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)^2} = \frac{2ha^2}{a^2 - b^2}.$$

$$\Sigma x_1 x_2 x_3 = -\frac{2a^2 h(a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)^3} = -\frac{2ha^2}{a^2 - b^2}.$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = -\frac{a^2 h^2}{(a^2 - b^2)^2}.$$

$$\text{எனவே, } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{\Sigma x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

$$= \frac{-2ha^2}{a^2 - b^2} = \frac{-a^2 h^2}{(a^2 - b^2)^2}$$

$$= \frac{2ha^2}{a^2 - b^2} \times \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 h^2} = \frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 h}$$

$$\therefore (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right)$$

$$= \left(\frac{2ha^2}{a^2 - b^2} \right) \left[\frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 h} \right] = 4.$$

மாதிரி 13 : ஒரு நீள் வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வரையும் செங்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் $\frac{a^2 x_1}{x} - \frac{b^2 y_1}{y} = a^2 - b^2$ என்ற வளைவில் இருக்கும் என திறவுக.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ நீள் வட்டத்திற்கு}$$

(h, k) புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு

$$\frac{a^2 x}{h} - \frac{b^2 y}{k} = a^2 - b^2.$$

இது (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்வின்,

$$\frac{a^2 x_1}{h} - \frac{b^2 y_1}{k} = a^2 - b^2.$$

$\therefore (h, k)$ புள்ளியின் இடங்கு வழி

$$\frac{a^2 x_1}{x} - \frac{b^2 y_1}{y} = a^2 - b^2.$$

மாதிரி 14 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் $l_1 x + m_1 y = 1$,

$l_2 x + m_2 y = 1$ என்ற நான்கு நுனிகளிலிருந்து செங்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்வின், $a^2 l_1 l_2 - b^2 m_1 m_2 = -1$ என திறவுக.

$$l_1 x + m_1 y = 1 \quad \dots = \dots \dots (1)$$

$$l_2 x + m_2 y = 1 \quad \dots = \dots \dots (2)$$

இத் தாண்டுகளின் நுனிகள் A, B, C, D எனக் கொள்வோம்.

இப் புள்ளிகளிலிருந்து செங்கோடுகள் P புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.

(அ - து) P புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள் A, B, C, D ஆகும்.

செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \lambda(l_1 x + m_1 y - 1) \\ (l_2 x + m_2 y - 1) = 0 \quad \dots (3)$$

மூன் மாதிரியில், ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் தொகுதிகளின் அடிப் புள்ளிகள்,

$$\frac{a^2 x_1}{x} - \frac{b^2 y_1}{y} = a^2 - b^2$$

$$(அ - இ) (a^2 - b^2)xy + b^2 y_1 x - a^2 x_1 y = 0 \quad \dots \quad (4)$$

வளைவரையில் இருக்குமெனக் கண்டோம்.

எனவே, சமன்பாடுகள் (3)-ம் (4)-ம் λ -யின் ஒரு மதிப்புக்கு ஓரளவும் ஒத்தனவாக இருக்கும்.

$$\text{சமன்பாடு (4)-இல், } x^2\text{-இன் கெழு} = 0$$

$$y^2\text{-இன் கெழு} = 0$$

$$\text{எண்ணுறுப்பு} = 0.$$

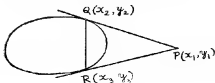
$$\therefore \frac{1}{a^2} + \lambda l_1 l_2 = 0$$

$$\frac{1}{b^2} + \lambda m_1 m_2 = 0$$

$$-1 + \lambda = 0$$

$$\therefore a^2 l_1 l_2 = b^2 m_1 m_2 = -1.$$

7.26. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத் திக்கு வரையும் தொகுதிகளின் தொகுதான்



படம் 71.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ திசு வட்டத்திற்கு உவரவும் தொடுகோடுகளின் தொடு புள்ளிகள் $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ எனக் கொள்வோம்.

$Q(x_2, y_2)$ புள்ளியிலுந்து தொடுகோடு

$$\frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1$$

இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்லின்,

$$\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$R(x_3, y_3)$ புள்ளியிலுந்து தொடுகோடு

$$\frac{xx_3}{a^2} + \frac{yy_3}{b^2} = 1$$

இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்லின்,

$$\frac{x_1x_3}{a^2} + \frac{y_1y_3}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

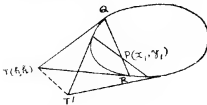
இது குறிக்கும்கோடு (1)-இன்படி $Q(x_2, y_2)$ வழியும், (2)-இன்படி $R(x_3, y_3)$ வழியும் செல்கிறது.

எனவே, இதுவே QR கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

∴ தொடுகோடுகளின் தொடு தாண்,

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

7.27. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தைச் சார்ந்த (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு



படம் 72

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு தீர் வட்டத்தை Q, R புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது என்கொள்வோம். Q, R புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $T(h, k)$ எனில், T புள்ளியின் இயங்கு வழி (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடாகும்.

$T(h, k)$ புள்ளியிலிருந்து தீர் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடுதான் QR -இன் சமன்பாடு

$$\frac{xh}{a^2} + \frac{yk}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்லுதலாகும்.

$$\frac{x_1 h}{a^2} + \frac{y_1 k}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (2)$$

எனவே, $T(h, k)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி

(அ - ஐ) $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

கிளை : ஜெர்மன் $S(ac, 0)$ புள்ளியின் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இயைக்கோடு

$$\frac{xac}{a^2} = 1 \quad (\text{அ-அ}) \quad x = \frac{a}{c}$$

(அ - அ) $S(ac, 0)$ ஜெர்மனின் இயைக்கோடு நீள் வட்டத்தின் மூத்த இயக்கு வரையாகும்.

7-28. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த $lx + my + n = 0$ என்ற கோட்டின் இயைப்பு புள்ளி

$$lx + my + n = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

என்ற கோட்டின்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \dots \dots (2)$$

நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இயைப்பு புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியின் (2)-ஐச் சார்ந்த இயைக்கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \dots \dots (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (3) ஒரே கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{l}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{m}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{-n}{1}$$

$$(\text{அ - அ}) \quad x_1 = -\frac{a^2 l}{n}, \quad y_1 = -\frac{b^2 m}{n}.$$

எனவே, $lx + my + n = 0$ கோட்டின் இயைப்பு புள்ளி

$$\left(-\frac{a^2 l}{n}, -\frac{b^2 m}{n} \right).$$

7-29. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தைச் சார்ந்த $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக் கோடு $Q(x_2, y_2)$ புள்ளி வழிச் செல்லின், Q -வின் இசைக்கோடு P வழிச் செல்லும்.

$$P(x_1, y_1) \text{ புள்ளியின் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

தீர் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக் கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

இது $Q(x_2, y_2)$ புள்ளி வழிச் செல்லும்.

$$\therefore \frac{x_2 x_1}{a^2} + \frac{y_2 y_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (2)$$

$Q(x_2, y_2)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$\frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (3)$$

இது (2)-இன்படி $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்லும்.

7-30. துணையியல் புள்ளிகளும், துணையியல் கோடுகளும் (Conjugate Points and Conjugate Lines)

யாதெனும் இரு புள்ளிகளில் தீர் வட்டத்தைச் சார்ந்த ஒன்றின் இசைக் கோடு மற்றதன் வழிச் செல்லின், அங்ஙனிகு புள்ளிகளும் தீர் வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியல் புள்ளிகள் எனப்படும்.

யாதெனும் இரு கோடுகளில் தீர் வட்டத்தைச் சார்ந்த ஒன்றின் இசைப் புள்ளி மற்றதன் மேலமைபுமெனின், அங்ஙனிகு கோடுகளும் தீர் வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியல் கோடுகள் எனப்படும்.

7-31. $l_1 x + m_1 y + n_1 = 0$, $l_2 x + m_2 y + n_2 = 0$ கோடுகள் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியல் கோடுகளாகவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ தீர் வட்டத்தைச் சார்ந்த } l_1 x + m_1 y$$

$$+ n_1 = 0 \text{ கோட்டின் இசைப்புள்ளி } \left(-\frac{a^2 l_1}{n_1}, -\frac{b^2 m_1}{n_1} \right).$$

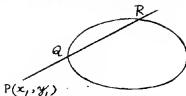
இப் புள்ளி $I_2x + m_2y + n_2 = 0$ கோட்டின் மீதானமை.

$$\therefore I_2 \left(-\frac{a^2 I_1}{n_1} \right) + m_2 \left(-\frac{b^2 m_1}{n_1} \right) + n_2 = 0.$$

$$(அ - து) \quad -a^2 I_1 I_2 - b^2 m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

$$(அ - து) \quad a^2 I_1 I_2 + b^2 m_1 m_2 = n_1 n_2.$$

7-32. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத் திசு வரையும் இடமடத் தொடுகோடுகள்



படம் 78.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{\cos \theta} = \frac{y-y_1}{\sin \theta} = r \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இக் கோட்டின் மீதுள்ள வரதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொகைகள்

$$(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta).$$

$$\text{இது } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (2)$$

நீள் வட்டத்தைச் சந்திக்குமிடங்களில்,

$$\frac{(x_1 + r \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + r \sin \theta)^2}{b^2} = 1.$$

$$\begin{aligned}
 \text{(அ-ஆ)} \quad r^2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right] + 2r \left[\frac{x_1 \cos \theta}{a^2} + \frac{y_1 \sin \theta}{b^2} \right] \\
 + \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \dots (3)
 \end{aligned}$$

இது (1)-இல் இருபடிச் சமன்பாட்டான இதை இரு மதிப்புக் கொண்ட r_1, r_2 என்பவை P புள்ளியிலிருந்து அக் கோடு தன் வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளான Q, R -இன் தூரங்களை அளக்கும்.

இக்கோடு தொடு கோடெனில்,

$$PQ = PR, \quad \therefore r_1 = r_2.$$

(அ - ஆ) சமன்பாடு (3)-இன் தீர்வுகள் சமம்.

எனவே, சமன்பாடு (3)-இன் தன்மைக் காட்டி பூச்சியமாகும்.

$$\begin{aligned}
 \text{(அ-ஆ)} \quad \left(\frac{x_1 \cos \theta}{a^2} + \frac{y_1 \sin \theta}{b^2} \right)^2 \\
 = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) \dots (4)
 \end{aligned}$$

சமன்பாடு (1)-இலிருந்து,

$$\cos \theta = \frac{x-x_1}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y-y_1}{r}.$$

இதை (4)-இல் பிரதியிடுவது,

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{x_1}{a^2} \cdot \frac{x-x_1}{r} + \frac{y_1}{b^2} \cdot \frac{y-y_1}{r} \right]^2 \\
 = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) \left[\frac{(x-x_1)^2}{a^2 r^2} + \frac{(y-y_1)^2}{b^2 r^2} \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(அ-ஆ)} \quad \left[\frac{(x-x_1)x_1}{a^2} + \frac{y_1(y-y_1)}{b^2} \right]^2 \\
 = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) \left[\frac{(x-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y-y_1)^2}{b^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{அ-அ}) \quad & \left[\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} \right) - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right) \right]^2 \\
 &= \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) \left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right) - 2 \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{அ-அ}) \quad & \left[\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 \right) - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) \right]^2 \\
 &= \left[\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right] \left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) - 2 \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 \right) \right] \dots (6)
 \end{aligned}$$

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

$$S_1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1$$

$$T = \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 \text{ என்ற குறியீட்டில்,}$$

சமன்பாடு (6),

$$(T - S_1)^2 = S_1(S + S_1 - 2T) \text{ என்றாகும்.}$$

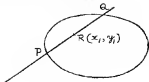
$$(\text{அ-அ}) \quad T^2 = SS_1.$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$T^2 = SS_1.$$

$$\begin{aligned}
 (\text{அ-அ}) \quad & \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 \right)^2 \\
 &= \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

7-33. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தில் (x_1, y_1) -ஐ நடுப் புள்ளி
வாகக் கொண்ட நாளின் சமன்பாடு



படம் 74.

$$\text{நீள் வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

இதன் நாளின் PQ எனவும், PQ-வின் நடுப்புள்ளி $R(x_1, y_1)$ எனவும் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{\cos \theta} = \frac{y-y_1}{\sin \theta} = r \quad \dots \quad (2)$$

எனக் கொண்டால், இக் கோட்டின் விதுவன் வாதேனும், ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்

$$(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta).$$

இக் கோடு நீள் வட்டத்தை வெட்டு மீடங்களில்,

$$\frac{(x_1 + r \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + r \sin \theta)^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{(அ) - (ஆ)} \quad & r^2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right] \\ & + 2r \left[\frac{x_1 \cos \theta}{a^2} + \frac{y_1 \sin \theta}{b^2} \right] \\ & + \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \dots \quad (3) \end{aligned}$$

இது r -இல் இருபடிச் சமன்பாடு. இதன் இரு மதிப்புகளான r_1, r_2 என்பவை R புள்ளியிலிருந்து P, Q புள்ளிகளின் தூரங்களை அளக்கும்.

R புள்ளி, PQ -வின் நடுப் புள்ளியாதின்,

$$r_1 = -r_2$$

$$r_1 + r_2 = 0$$

(அ - ஐ) சமன்பாடு (3)-இன் தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \frac{x_1 \cos \theta}{a^2} + \frac{y_1 \sin \theta}{b^2} = 0 \quad \dots \quad (4)$$

சமன்பாடு (1)-இலிருந்து,

$$\frac{x-x_1}{r} = \cos \theta, \quad \frac{y-y_1}{r} = \sin \theta.$$

இதைச் சமன்பாடு (4)-இல் பிரதியிடுவர்

$$\frac{x_1}{a^2} \cdot \frac{x-x_1}{r} + \frac{y_1}{b^2} \cdot \frac{y-y_1}{r} = 0$$

$$(அ - ஐ) \quad \frac{xx_1 - x_1^2}{a^2} + \frac{yy_1 - y_1^2}{b^2} = 0$$

$$(அ - ஐ) \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

$$(அ - ஐ) \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1.$$

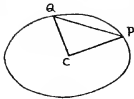
வழக்கமான குதிரீட்டில், இது

$$T = S_1 \text{ என்கறும்.}$$

$\therefore (x_1, y_1)$ -ஐ நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தன் வட்ட நாளின் சமன்பாடு $T = S_1$.

$$(அ - ஐ) \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}.$$

மாடு 15 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தின் தாண்டல் தீர் வட்ட மையத்தில் செங்கோணத்தை ஏற்குமெனின், அந்நாண் களின் தீர் வட்டத்தைச் சாத்த இயைப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.



படம் 75

$$\text{தீர் வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

தீர் வட்ட மையம் $C(0, 0)$ -த்தில் செங்கோணத்தை ஏற்கும் தாண்டலில் ஒன்று PQ எனக்கொள்கோம்.

(1)-ஐச் சாத்த PQ -யின் இயைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனின், PQ -யின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடு (1)-ஐச் சமன்பாடு (2)-ஐக் கொண்டு சமயுத்த தாள் சமன்பாடாக்கினால் CP, CQ என்ற இரட்டைக் கோடுகளின் சேத்த சமன்பாடு கிடைக்கப்பெறும்.

(அ-து) CP, CQ -யின் சேத்த சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} \right)^2 \quad \dots \quad (3)$$

CP, CQ தம்முகச் செங்குத்தாக வெட்டிவதால், சமன்பாடு (3)-இல்

$$x^2\text{-இன் கெழு} + y^2\text{-இன் கெழு} = 0.$$

$$\therefore \left(\frac{1}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^4} \right) + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^4} \right) = 0.$$

$$(அ-அ) \quad \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

எனவே, (x_1, y_1) -இல் இயங்கு வழி,

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

மாதிரி 10 : $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = 1$ -ஐச் சாத்த P புள்ளியின் இசைக்கோட்டிற்கு தீர் வட்டத்தின் குவியங்களிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளும் தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை C^2 எனில், P -யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) என்போம். தீர் வட்டத்தைச் சாத்த $P(x_1, y_1)$ -இன் இசைக்கோடு

$$\frac{xx_1}{a^4} + \frac{yy_1}{b^4} = 1. \quad \dots \quad (1)$$

$S(-ae, 0)$ புள்ளியிலிருந்து (1)-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் தீர்வு p_1 எனில்,

$$p_1 = \frac{\frac{x_1 e}{a} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}$$

$S'(-ae, 0)$ புள்ளியிலிருந்து (1)-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் தீர்வு p_2 எனில்,

$$p_2 = \frac{\frac{-x_1 e}{a} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}$$

$p_1 p_2 = c^2$ ஆகலின்,

$$\left(\frac{x_1 e}{a} - 1 \right) \left(\frac{-x_1 e}{a} - 1 \right) = c^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} \right).$$

$$(அ-ஆ) \quad -\left(\frac{x_1^2 e^2}{a^2} - 1\right) = c^2\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)$$

$$(அ-ஆ) \quad (a^2 - x_1^2 e^2) = a^2 c^2 \left[\frac{x_1^2 b^4 + y_1^2 a^4}{a^4 b^4} \right]$$

$$(அ-ஆ) \quad a^2 b^4 (a^2 - x_1^2 e^2) = a^2 c^2 (x_1^2 b^4 + y_1^2 a^4).$$

$$(அ-ஆ) \quad x_1^2 b^4 (a^2 e^2 + c^2) + y_1^2 a^4 c^2 = a^4 b^4.$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவழி

$$\frac{x^2(a^2 e^2 + c^2)}{a^4} + \frac{y^2 c^2}{b^4} = 1 \quad \text{ஆகும்.}$$

மாதிரி 17: தீர் வட்டத்தின் செங்கோட்டு நகன்களின் தீர் வட்டத்தைச் சார்ந்த இரைப் புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழிக் காண்க.

$$\text{தீர் வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

தீர் வட்டத்திற்கு P புள்ளியிலுத்துச் செங்கோட்டு, அதை மீண்டும் Q -யில் சந்திப்பின், PQ நான் செங்கோட்டு நான் எனப் படும்.

P புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ எனவும், நான் PQ -யின் இரைப் புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்வோம்.

P -யிலுத்துச் செங்கோட்டு

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

இரைக்கோட்டு PQ -யின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3) ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{\frac{a}{\cos \theta}}{\frac{x_1}{a}} = \frac{\frac{-b}{\sin \theta}}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{a^2 - b^2}{1}$$

$$\text{எனவே, } \cos \theta = \frac{a^2}{x_1(a^2-b^2)}, \quad \sin \theta = -\frac{b^2}{y_1(a^2-b^2)}.$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ ஆகையின்,}$$

$$\frac{a^4}{x_1^2(a^2-b^2)^2} + \frac{b^4}{y_1^2(a^2-b^2)^2} = 1.$$

$\therefore (x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$\frac{a^4}{x^2(a^2-b^2)^2} + \frac{b^4}{y^2(a^2-b^2)^2} = 1$$

$$(\text{அ-அ}) \quad \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = (a^2-b^2)^2.$$

மாதிரி 18 : $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டுமெனின், P புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

$$\text{நீள் வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \dots (1)$$

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து (1)-க்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள்

$$T^2 = SS_1,$$

$$\begin{aligned} (\text{அ-அ}) \quad & \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 \right)^2 \\ & = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) \dots (2) \end{aligned}$$

இருவகன் தம்முள் செங்குத்தாகவிறப்பின், சமன்பாடு (2)-இன்

$$x^2\text{-இன் கெழு} + y^2\text{-இன் கெழு} = 0.$$

$$\begin{aligned} (\text{அ-அ}) \quad & \left\{ \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) \right\} \\ & + \left\{ \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} &= \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \\ &= \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_1^2}{a^2 b^2} + \frac{y_1^2}{a^2 b^2} + \frac{y_1^2}{b^4} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).\end{aligned}$$

$$(அ-து) \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2 b^2}$$

$$(அ-து) \quad a^2 + b^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவழி

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

இது குத்துத் தொடுகோடு வட்டம் எனப்படும்.

மாதிரி 19 : நீள் வட்ட மையத்தில் செங்கோணத்தை ஏற்கும் தாள்களின் தடுப்புகளிலின் இயங்கு வழிக் காண்க.

$$\text{நீள் வட்டம்} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \dots (1)$$

நீள் வட்ட மையம் $C(0, 0)$ -த்தில் செங்கோணத்தை ஏற்கும் தாள்களில் ஒன்று PQ எனவும், அதன் நடுமூலில் $R(x_1, y_1)$ எனவும் கொள்வோம்.

$\therefore PQ$ தாளின் சமன்பாடு

$$T = S_1$$

$$(அ-து) \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடு (1)-ஐச் சமன்பாடு (2)-இனால் சமபடித்தான சமன்பாடாகில், CP, CQ என்ற இரட்டைத் தொடுகளின் சமன்பாடு கிடைக்கப்பெறும்.

$\therefore CP, CQ$ -வின் செத்த சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left\{ \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} \right\}^2 = \dots \dots (3)$$

ப. வ. - 10.

CP , CQ கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தானவை வாதனை, சமன்பாடு (8)-இல்,

$$x^2\text{-இன் கெழு} + y^2\text{-இன் கெழு} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-அ)} \quad & \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{\frac{x_1^2}{a^4}}{\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)^2} \right\} \\ & + \left\{ \frac{1}{b^2} - \frac{\frac{y_1^2}{b^4}}{\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)^2} \right\} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{(அ-அ)} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}{\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)^2}$$

$$\text{(அ-அ)} \quad \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}.$$

எனவே, $R(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இவங்கு வளி

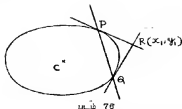
$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}.$$

மூலம் 20: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = a+b$ தன் வட்ட-த்தை $\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1$ எனும் கோடு வெட்டும் புள்ளிகளிடத்துத் தொடு கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாய் வெட்டும் என நிறுவுக.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = (a+b) \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1 \quad \dots \quad (2)$$

கோடு (2), தன் வட்டம் (1)-ஐ வெட்டும் புள்ளிகள் P , Q எனவும், இப்புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் தம்முள் வெட்டும் புள்ளி $R(x_1, y_1)$ எனவும் கொள்வோம்.



(x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகளில் தொடு நான் PQ ஆதலின், அதன் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a} + \frac{yy_1}{b} = a + b \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

சமன்பாடுகள் (6), (8) ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{\frac{\cos \theta}{a}}{\frac{x_1}{a}} = \frac{\frac{\sin \theta}{b}}{\frac{y_1}{b}} = \frac{1}{a+b}$$

$$(அ - ஆ) \quad \cos \theta = \frac{x_1}{a+b}, \quad \sin \theta = \frac{y_1}{a+b}$$

$$\text{எனவே, } \frac{x_1^2}{(a+b)^2} + \frac{y_1^2}{(a+b)^2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

$$\therefore x_1^2 + y_1^2 = (a+b)^2 \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

மேலும், RP, RQ கோடுகளின் சேர்த்த சமன்பாடு

$$T^2 = SS_1.$$

$$(அ - ஆ) \quad \left[\frac{xx_1}{a} + \frac{yy_1}{b} - a - b \right]^2 \\ = \left[\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 \right] \left[\frac{x_1^2}{a} + \frac{y_1^2}{b} - 1 \right]$$

இக் கோடுகள் தம்மன் செங்குத்த தெனில்,

$$x^2 - இன் கெடு + y^2 - இன் கெடு = 0.$$

$$\begin{aligned} (அ - து) \quad & \frac{1}{a} \left(a + b - \frac{y_1^2}{b} \right) + \frac{1}{b} \left(a + b - \frac{x_1^2}{a} \right) \\ &= 1 + \frac{b}{a} - \frac{y_1^2}{ab} + \frac{a}{b} + 1 - \frac{x_1^2}{ab} \\ &= 2 + \frac{a^2 + b^2}{ab} - \frac{x_1^2 + y_1^2}{ab} \\ &= \frac{2ab + a^2 + b^2 - (x_1^2 + y_1^2)}{ab} \\ &= \frac{(a + b)^2 - (x_1^2 + y_1^2)}{ab} \\ &= \frac{[(a + b)^2 - (a + b)^2]}{ab} = 0 \quad \dots [(4) - இலிருந்து]. \end{aligned}$$

எனவே, தொடுகோடுகள் தம்மன் செங்குத்தாக வெட்டும்.

பயிற்சி 7.2.

1. ஒரு புள்ளியிலிருந்து தீன் வட்டத்திற்கு வரையும் செங் கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகளில் இரண்டு $(x + y) = 1$ கோட்டின்மீது அமைவுமெனின் மற்ற இரு புள்ளிகள் $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} + 1 = 0$ என்ற கோட்டின்மீது அமைவுமென நிறுவ.

2. ஒரு புள்ளியிலிருந்து தீன் வட்டத்திற்கு வரையும் செங் கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் A, B, C, D , AB, CD கோடுகளின் தீன் வட்டத்தைச் சார்ந்த இரைப்புள்ளிகள் $(\alpha, \beta), (h, k)$ எனின், $\alpha h = -a^2$, $\beta k = -b^2$ என நிறுவ.

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீன் வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகளின் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீன் வட்டத்தைச் சார்ந்த இரைப்புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழிக் காண்க.

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்ட நாண்கள் (x_1, y_1) எனும் நிலைத்த புள்ளி வழிக் செலக்சன் ஆந்தாண்கள்தம் நடுப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க. இஃது ஒரு தீர் வட்டம் என திறவுக.

5. $(x+my) = 1$ -இல் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -ஐச் சார்ந்த இசைப் புள்ளி $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$ என்ற வட்டத்திலிருந்து அமைபத் தேவையான கட்டுப்பாடு யாறு?

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தின் நாண்கள்தம் இசைப்புள்ளிகள் துணை வட்டத்திலிருந்து அமைபுமெனின், ஆந்தாண்கள்தம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $x^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2$ என திறவுக.

7. $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ வட்டத்தின் தொடுகோடுகளின் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழிக் காண்க.

8. தீர் வட்டத்திற்கு P புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் இசைப் புள்ளி Q புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் மீதமைபுமெனின், Q புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் இசைப் புள்ளி P -யிடத்துச் செங்கோட்டின் மீதமைபு மென திறவுக.

9. தீர் வட்டத்தில் P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு பேர்தரை G புள்ளியில் சந்திக்கும். செங்கோட்டின் $PQ = PG$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைந்துள்ள Q புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தின் தொடுகோடுகளின் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழிக் காண்க.

11. $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ வட்டத்தைச் சாத்த $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தன் வட்டச் செங்கோட்டு நான்களின் இடைப் புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழிக் காண்க.

12. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தன் வட்டத்தைச் சாத்த $x^2 + y^2 = r^2$ வட்டத்தின் தொடுகோடுகள்தம் இடைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = 1$ என நிறவுக.

13. $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தன் வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடு கோடுகள் PQ, PR தன் வட்டத்தின் குவியம் $S(a, 0)$ எனின்,

$$\frac{SP^2}{SQ \cdot SR} = \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} \text{ என நிறவுக.}$$

14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தன் வட்டத்தின் புள்ளிகளிலிருந்து $x^2 + y^2 = r^2$ வட்டத்திற்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் தொடு நான் $a^2x^2 + b^2y^2 = r^2$ எனும் தன் வட்டத்தைத் தொடும் என நிறவுக.

15. C புள்ளி $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் மையம். தன் வட்டத்தின் P புள்ளிக்கு ஒத்தபுள்ளி Q எனின், CQ -யின் நீட்டல் $x^2 + y^2 = 4(a+b)^2$ வட்டத்தை R புள்ளியில் வெட்டுகிறது. PR எனும் கோடு,

$$\frac{x^2}{(2a+b)^2} + \frac{y^2}{(2b+a)^2} = \frac{4}{9}$$

எனும் தன் வட்டத்தின் செங்கோடு என நிறவுக.

விடைகள்

8. $\frac{x^2\alpha^2}{a^4} + \frac{y^2\beta^2}{b^4} = 1$, 9. $a^2l^2 + b^2m^2 = 4$.

7. $r^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right) = \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 \right)^2$, 8. $\left(\frac{ax}{a^2+b^2} \right)^2 + \frac{y^2}{4b^2} = 1$, 10. $a^3c^4x^2 + b^3c^4y^2 = 1$, 11. $\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} = 1$.

7-34. நீள் வட்டத்தின் விட்டம்

ஒரு நீள் வட்டத்தில் இணை நான்குதம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி, நீள் வட்டத்தின் விட்டம் (diameter) எனப்படும்.

7-35. நீள் வட்ட விட்டத்தின் சமன்பாடு

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் இணை நான்குதம் (parallel chords) ஒன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) -ஐ நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட நான்குதம் சமன்பாடு

$$T = S_1,$$

$$(அ-து) \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}.$$

$$\text{இதன் சரிவு} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

இணை நான்குதம் யாவும் $y = mx$ கோட்டிற்கு இணை பெயரின், நான்குதம் அனைத்தின் சரிவும் m -க்குச் சமனாகும்.

$$\therefore m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

எனவே, (x_1, y_1) நடுப்புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x.$$

(அ-து) $y = mx$ கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள நான்குதம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x.$$

இஃது அதி (அ-து) நீள் வட்ட அளவம் வழிச் செல்லும் ஒரு கோடாகியும், இது நீள் வட்டத்தின் விட்டம் எனப்படும்.

7-36. நீள் வட்ட விட்டத்தின் சமன்பாடு

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x.$$

இதை $y = m_1x$ வடிவில் எழுதினும்,

$$m_1 = -\frac{b^2}{a^2m}.$$

$$(அ-அ) \quad mm_1 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

(அ-அ) $y = m_1x$ எனும் கோடு $y = mx$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள நான்கின் அனைத்துமூலம் சமமாகி விடுவதால்,

$$mm_1 = -\frac{b^2}{a^2} \text{ ஆகும்.}$$

இக் கட்டுப்பாடு சமச் சீகுள்ளதால் (symmetric), $y = m_1x$ -க்கு இணையாக உள்ள நான்கின் $y = mx$ எனும் கோடு சமமாகி விடுகிறது.

எனவே, நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் விட்டம் ஒன்று மறிதொகு விட்டத்திற்கு இணையாக உள்ள நான்கின்ச் சமமாகி விடுவதால், அவ்வகைத் சரிவுகளின் பெருக்குத் தொகை $-\frac{b^2}{a^2}$ ஆகும். இத் தன்மை பெற்றுள்ள இரு விட்டங்கள் துணை விவ் விட்டங்கள் (conjugate diameters) எனப்படும்.

(அ-அ) நீள் வட்டத்தின் இரு விட்டங்களில் ஒன்று மற்ற தற்கு இணையாக உள்ள நான்கின் இரு சமமாகி விடுவதால், அவ்விரு விட்டங்களும் துணைவிவ் விட்டங்கள் எனப்படும்.

$$\text{7.57. நீள்வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

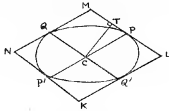
A, A' - பேரக்கின் குவிகள்

B, B' - சிற்றக்கின் குவிகள்

S, S' - நீள் வட்டத்தின் குவிகள்

பேரக்க நீளம் $2a$, சிற்றக்க நீளம் $2b$.

(i) இரு துணைவிய விட்டங்கள்தம் துளிகளின் துணை விட்டக் கோணங்களின் வேறுபாடு ஒரு செங்கோணமாகும்.



படம் 77.

PCP' , QCQ' இரு துணைவிய விட்டங்கள் எனவும், P , Q புள்ளிகளின் துணை விட்டக் கோணங்கள் முறையே θ , ϕ எனவும் கொள்வோம்.

$\therefore P$, Q புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் $(a \cos \theta, b \sin \theta)$, $(a \cos \phi, b \sin \phi)$.

$C(0, 0)$ ஆதலின்,

$$CP\text{-யின் சரிவு} = \frac{b \sin \theta}{a \cos \theta}$$

$$CQ\text{-யின் சரிவு} = \frac{b \sin \phi}{a \cos \phi}$$

CP , CQ துணைவிய விட்டங்களாதலின், அவைகள்தம் சரிவுகளின் பெருக்குத்தொகை, $-\frac{b^2}{a^2}$.

$$\therefore \frac{b \sin \theta}{a \cos \theta} \cdot \frac{b \sin \phi}{a \cos \phi} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

$$(\text{அ.அ}) \sin \theta \sin \phi = -\cos \theta \cos \phi$$

$$(\text{அ.அ}) \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi = 0$$

$$\therefore \cos(\theta - \phi) = 0$$

$$\therefore \theta - \phi = \frac{\pi}{2}$$

(ii) துணையிய இரு அரைவட்டக்கூறுகள் (Semidiameters) ஸ்க்கல்களின் கூட்டுத் தொகை ஒரு மாறிலியாகும்.

CP, CQ துணையிய அரைவட்டக்கூறுகள் P புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்.

$$(a \cos \theta, b \sin \theta)$$

Q புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்,

$$[a \cos(\theta + \phi), b \sin(\theta + \phi)]$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad (-a \sin \theta, b \cos \theta).$$

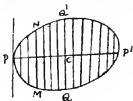
$$\begin{aligned} CP^2 &= (a \cos \theta - 0)^2 + (b \sin \theta - 0)^2 \\ &= a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CQ^2 &= (a \sin \theta - 0)^2 + (b \cos \theta - 0)^2 \\ &= a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

என:

$$\begin{aligned} \therefore CP^2 + CQ^2 &= a^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + b^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= a^2 + b^2. \\ &= \text{ஒரு மாறிலி.} \end{aligned}$$

(iii) நீள் வட்ட வடிவத்தில் அளவிடத்தகுத் தொடுகோடு அளவிட்டல் இரு சமங்கால் மீட்கும் இணை தாண்டுகளுக்கு இணையாக இருக்கும்.



படம் 78.

தீர் வட்டத்தில் $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$y = mx + c \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாடு கொண்ட நான் MN -க்கு இணையானக் செவ்வோரம்.

(x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு.

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

கோடுகள் (1), (2) தம்முள் இணையானவின், அமைவகம் தம் செவ்வோரம் சமம்.

$$\therefore m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

(அ-து) (x_1, y_1) புள்ளி, $y = -\frac{b^2 x}{a^2 m}$ கோட்டின் மீதமைவகம்-புத்தி 7-84-இன்படி இக்கோடு MN மத்தும் அதற்கு இணையாக உள்ள நான்கன் அமைத்தமைவகம் இரு சமமாகப் பிடுக்கும்.

(iv) P, P', Q, Q' அமைவகமிடத்துத் தொடுகோடுகளாக அமைவகம் தாக்கத்தின் பாய்பு ஒரு மாநிலியாகும்.

புத்தி 7-88 (i)-இன், படம் 77-ஐப் பார்க்கவும்.

P, P', Q, Q' புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளாக அமைவகம் தாக்கம் $KLMN$.

C புள்ளியிலிருந்து LM கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்,

$$CT = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}}$$

$$\begin{aligned} & \because P \text{ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு } LM, \frac{x}{a} \cos \theta \\ & + \frac{y}{b} \sin \theta = 1, \quad c(0, 0) \end{aligned}$$

$$\text{மேலும் } PM = CQ = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

∴ இணைகரம் $KLMN$ -இன் பரப்பு

$$= 4 (\text{இணைகரம் } CPMQ)$$

$$= 4 [PM \cdot CT]$$

$$= 4 [\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}] \left[\frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} \right]$$

$$= 4 ab$$

$$= \text{மாநிலி.}$$

- (v) தீம் வட்டத்தின் மீதுள்ள P புள்ளியின் குவியத் தூரங்கள்தம் (focal distances) பெருக்குத் தொகை P வழிச் செல்லும் விட்டத்தின் துணையிய அரை விட்டத்தின் வர்க்கத்திற்குச் சமம். (அ - து) $SP \cdot S'P = CQ^2$.

பத்தி 7-8-இன் படி,

$$SP = a - ae \cos \theta$$

$$S'P = a + ae \cos \theta.$$

$$\therefore SP \cdot S'P = (a - ae \cos \theta)(a + ae \cos \theta)$$

$$= a^2 - a^2 e^2 \cos^2 \theta$$

$$= a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \theta \quad [\because a^2 - b^2 = a^2 e^2]$$

$$= a^2 (1 - \cos^2 \theta) + b^2 \cos^2 \theta$$

$$= a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta.$$

$$CQ^2 = (-a \sin \theta - 0)^2 + (b \cos \theta - 0)^2$$

$$[\because Q(-a \sin \theta, b \cos \theta)]$$

$$= a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta.$$

$$\therefore SP \cdot S'P = CQ^2.$$

- (vi) P புள்ளியிலுந்துத் தொடு கோட்டிற்கு தீம் வட்ட மையம் C -யிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் தீனம் p எனில், $p \cdot CQ = ab$.

P புள்ளியின் ஆயத் தொகைகள்

$(a \cos \theta, b \sin \theta)$ எனின்,

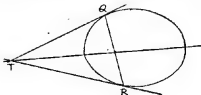
P -விடத்துத் தொடு கோடு

$$\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1.$$

C -வின் ஆயத் தொகைகள் $(0, 0)$ ஆதலின்,

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} \\ = \frac{ab}{CQ}.$$

7-38. நாணின் முனிகளிடத்துத் தொடு கோடுகள் அந் நாணச் சமவாகப் பிக்கும் விட்டத்தின்மேல் சந்திக்கும்



படம் 79.

$$\text{தீர்வாட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

நாண் QR -இன் சமன்பாடு $y = mx + C$ (1) என்போம்.

Q, R புள்ளிகளிடத்துத் தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $T(x_1, y_1)$ எனக் கொள்வோம்.

T புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் தொடு நாண் QR ஆதலின், அதன் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கோட்டைக் குறிக்கு மாதலின்,

$$m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

(அ-ஆ) (x_1, y_1) புள்ளி $y = -\frac{b^2}{a^2 m} x$ என்ற கோட்டின் மீதமைந்தும்.

இக் கோடு நான் OR , மற்றும் அதற்கு இணையாக உள்ள நான்காவது இரு சமவாகுப் பிசுக்கும் விட்டமாகும்.

7.39. துணையிய விட்டங்கள் இரண்டும் சமமெனில் அவை துணையியச் சம விட்டங்கள் எனப்படும் (Equiconjugate Diameters)

துணையிய விட்டங்கள் இரண்டின் தளிகள் P , Q எனக் கொள்வோம்.

P -யின் ஆயத்தொலைகள் $(a \cos \theta, b \sin \theta)$.

Q -யின் ஆயத்தொலைகள் $(-a \sin \theta, b \cos \theta)$.

துணையிய விட்டங்கள் சமமெனில்,

$$CP = CQ$$

$$\therefore CP^2 = CQ^2$$

$$CP^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$$

$$CQ^2 = a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta.$$

$$\therefore a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta = a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta.$$

$$\therefore (a^2 - b^2) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0.$$

$$\therefore (\text{அ-ஆ}) \quad (a^2 - b^2) \cos 2\theta = 0.$$

$$a \neq b, \therefore \cos 2\theta = 0.$$

$$\therefore (\text{அ-ஆ}) \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad (\text{அ-ஆ}) \quad \frac{3\pi}{2}.$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} \quad (\text{அ-ஆ}) \quad \frac{3\pi}{4}.$$

எனவே, P , Q -வின் ஆயத்தொலைகள் முறையே,

$$\left(a \cos \frac{\pi}{4}, b \sin \frac{\pi}{4}\right), \left(-a \sin \frac{\pi}{4}, b \cos \frac{\pi}{4}\right).$$

$$(\text{அ-ஆ}) \quad \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\therefore CP\text{-வின் சமன்பாடு } y = \frac{b}{a}x.$$

$$CQ\text{-வின் சமன்பாடு } y = -\frac{b}{a}x.$$

துணையிசை சம வட்டங்கள் CP , CQ -வின் சேர்த்த சமன்பாடு

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

மாதிரி 21 : துணையிசை வட்டங்கள் சமமெனின், அவைகளிலிருந்து எழும் குறுங்கோணம் மிகச் சிறியது என நிறுவுக.

C தீர் வட்ட மையம்,

CP , CQ துணையிசை அரை வட்டங்கள் எனில்,

P , Q புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே $(a \cos \theta, b \sin \theta)$, $(-a \sin \theta, b \cos \theta)$ ஆகும்.

CP கோட்டின் சரிவு,

$$m_1 = \frac{b \sin \theta - 0}{a \cos \theta - 0} = \frac{b \cdot \sin \theta}{a \cdot \cos \theta}$$

CQ கோட்டின் சரிவு,

$$m_2 = \frac{b \cos \theta - 0}{-a \sin \theta - 0} = -\frac{b \cos \theta}{a \sin \theta}$$

CP , CQ கோடுகளின் இடைக்கூட்ட கோணம் θ எனில்,

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \\&= \frac{\frac{b \sin \theta}{a \cos \theta} + \frac{b \cos \theta}{a \sin \theta}}{1 + \frac{b \sin \theta}{a \cos \theta} \cdot \frac{b \cos \theta}{a \sin \theta}} \\&= \frac{ab \sin^2 \theta + ab \cos^2 \theta}{a^2 \sin \theta \cos \theta + b^2 \sin \theta \cos \theta} \\&= \frac{ab(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{(a^2 + b^2) \sin \theta \cos \theta} \\&= \frac{ab}{(a^2 + b^2) \sin 2\theta}.\end{aligned}$$

$\sin 2\theta$ -வின் மதிப்பு மீட்பெரியதெனின் θ -இன் மதிப்பு மீச்சிறியதாகும். $\sin 2\theta$ -வின் மீட்பெரும் மதிப்பு 1 ஆகவே,

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \quad (\text{அ - ஐ}) \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ எனில், θ -வின் மதிப்பு மீச்சிறியதாகும் (minimum).

$$CP^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta,$$

$$CQ^2 = a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta.$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ எனில்,

$$CP^2 = a^2 \cos^2 \frac{\pi}{4} + b^2 \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

$$CQ^2 = a^2 \sin^2 \frac{\pi}{4} + b^2 \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

எனவே, $\theta = \frac{\pi}{4}$ எனில்,

$$CP = CQ.$$

தன் வட்டம்

(அ-ஆ) ஆணவிய வட்டங்கள் சமம்.

$$\tan \phi = \frac{b \cos \theta}{(a^2 - b^2) \sin \theta}.$$

இதில் $\theta = \frac{\pi}{4}$ எனப் பிரதியிடின்,

$$\tan \phi = \frac{b \cos \theta}{a^2 - b^2}.$$

எனவே, ஆணவிய வட்டங்களின் இடைவட்டக் குறியீடு காணத்தின் மீச்சிறு மதிப்பு

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{b \cos \theta}{a^2 - b^2} \right).$$

மாநில 22: CP, CQ என்பவை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தன் வட்டத்தின் ஆணவிய வட்டங்கள் எனின், PQ நகனின் நடுப்புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொகுக்கோடுகள் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2$ தன் வட்டத்தின் மேல் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

P, Q புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் $(a \cos \theta, b \sin \theta), (-a \sin \theta, b \cos \theta)$ என்க.

PQ நகனின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனின்,

$$x_1 = \frac{a(\cos \theta - \sin \theta)}{2},$$

$$y_1 = \frac{b(\sin \theta + \cos \theta)}{2}.$$

$$(அ-அ) \quad \frac{2x_1}{a} = \cos \theta - \sin \theta.$$

$$\frac{2y_1}{b} = \cos \theta + \sin \theta.$$

ப. வ. = 20

இரண்டையும் வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட,

$$\frac{4x_1^2}{a^2} + \frac{4y_1^2}{b^2} = (\cos \theta - \sin \theta)^2 + (\cos \theta + \sin \theta)^2 = 2,$$

$$(அ) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{1}{2}.$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவழி

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}.$$

மீண்டும்,

P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1.$$

Q புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$-\frac{x}{a} \sin \theta + \frac{y}{b} \cos \theta = 1.$$

இவைகளிலிருந்து வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவழி, இவைகளின் சமன்பாடுகளிலிருந்து θ -வை நீக்கின் கிடைக்கப்பெறும்.

இவை இரண்டையும் வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட,

$$\left(\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta \right)^2 + \left(-\frac{x}{a} \sin \theta + \frac{y}{b} \cos \theta \right)^2 = 1 + 1.$$

$$(அ) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2.$$

எனவே, P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$$

என்ற நீள் வட்டத்தின்மீது வெட்டிக் கொள்கின்றன.

மாதிரி 23: நீள் வட்டத்தின் துணைவியை அதன் விட்டங்களை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்களின் இரண்டாவது வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

$$\text{நீள் வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

CP , CQ துணையிய அரை வட்டங்கள் எனக் கொள்ளோம்.

$C(0, 0)$, $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$, $Q(-a \sin \theta, b \cos \theta)$.

CP -ஐ வட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-0)(x-a \cos \theta) + (y-0)(y-b \sin \theta) = 0.$$

$$(அ - து) \quad x^2 + y^2 - ax \cos \theta - by \sin \theta = 0 \quad \dots \quad (1)$$

CQ -ஐ வட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-0)(x+a \sin \theta) + (y-0)(y-b \cos \theta) = 0.$$

$$(அ - து) \quad x^2 + y^2 + ax \sin \theta - by \cos \theta = 0 \quad \dots \quad (2)$$

வட்டங்கள் (1), (2) வெட்டும் இரண்டாவது புள்ளியின் இயங்கு வழி பெற, அச் சமன்பாடுகளிலிருந்து 0-ஐ நீக்க வேண்டும்.

$$(1)\text{-இலிருந்து } x^2 + y^2 = (ax \cos \theta + by \sin \theta),$$

$$(2)\text{-இலிருந்து } x^2 + y^2 = (yb \cos \theta - xa \sin \theta).$$

இவை இரண்டையும் வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட,

$$2(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$

\therefore வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = 2(x^2 + y^2)^2.$$

மாதி 24 : $y = mx + \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 m^2 + b^2)}$ எனும் கோடு

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தன் வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளை தன் வட்ட மையத்துடன் சேர்க்கும் கோடுகள் துணையிய அரை வட்டங்கள் என நிறுவுக.

$$y = mx + \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 m^2 + b^2)} \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

கோடு (1), நீள்வட்டம் (B)-ஐ P, Q புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம்.

நீள் வட்ட மையம் C ஆகியதால், CP, CQ கோடுகளின் சேர்த்த சமன்பாடு மீற, சமன்பாடு (B)-ஐச் சமன்பாடு (1)-ஆல் சமப்படுத்தான சமன்பாடாக மாற்ற வேண்டும்.

∴ CP, CQ கோடுகளின் சேர்த்த சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left[\frac{y - mx}{\sqrt{\frac{1}{b^2}(a^2m^2 + b^2)}} \right]^2$$

$$(அ-ஆ) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(y - mx)^2}{\frac{1}{b^2}(a^2m^2 + b^2)}$$

$$(அ-ஆ) \quad x^2 \left[\frac{1}{a^2} - \frac{2mx}{a^2m^2 + b^2} \right] - \frac{4mxy}{a^2m^2 + b^2} + y^2 \left[\frac{1}{b^2} - \frac{2}{a^2m^2 + b^2} \right] = 0.$$

CP, CQ கோடுகளின் சரிவு m_1, m_2 எனில்,

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{2m^2}{a^2m^2 + b^2}}{\frac{1}{b^2} - \frac{2}{a^2m^2 + b^2}} \\ &= \frac{b^2(a^2m^2 + b^2 - 2a^2m^2)}{a^2(a^2m^2 + b^2 - 2b^2)} \\ &= \frac{b^2(b^2 - a^2m^2)}{a^2(a^2m^2 - b^2)} \\ &= -\frac{b^4(a^2m^2 - b^2)}{a^2(a^2m^2 - b^2)} \\ &= -\frac{b^2}{a^2}. \end{aligned}$$

எனவே, CP, CQ ஆகியவை வீட்டங்களாகும்.

மாதிரி 25 : CP, CQ இரு துணைவியை வட்டங்களின் P, Q புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$2(a^2x^2 + b^2y^2)^2 = (a^2 - b^2)(b^2y^2 - a^2x^2)^2 \text{ என திருவுக.}$$

P, Q புள்ளிகள் துணைவியை வட்டங்களின் துணிகளாதலின் அமைகின்ற ஆயத்தொலைகள் $(a \cos \theta, b \sin \theta), (-a \sin \theta, b \cos \theta)$ எனக் கொள்வோம்.

P -யிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2 \quad \dots \quad (1)$$

Q -யிடத்துச் செங்கோடு

$$- \frac{ax}{\sin \theta} - \frac{by}{\cos \theta} = a^2 - b^2 \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-இலிருந்து θ -ஐ நீக்கிச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழி கிடைக்கப் பெறும்.

(1)-இலிருந்து

$$ax \sin \theta - by \cos \theta = (a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta \quad \dots \quad (3)$$

(2)-இலிருந்து

$$-ax \cos \theta - by \sin \theta = (a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta \quad \dots \quad (4)$$

(3)-இலிருந்து (4)-ஐக் கழிப்பின்,

$$ax(\sin \theta + \cos \theta) + by(\sin \theta - \cos \theta) = 0.$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \sin \theta (ax + by) + \cos \theta (ax - by) = 0.$$

$$(\text{அ} - \text{து}) (ax + by) \sin \theta = (by - ax) \cos \theta.$$

$$\therefore \frac{\sin \theta}{by - ax} = \frac{\cos \theta}{by + ax} = \frac{1}{\sqrt{(by - ax)^2 + (by + ax)^2}}.$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{by - ax}{\sqrt{2(a^2x^2 + b^2y^2)}}$$

$$\cos \theta = \frac{by + ax}{\sqrt{2(a^2x^2 + b^2y^2)}}.$$

இதைச் சமன்பாடு (1)-இல் பிரதியிடுக.

$$\frac{ax\sqrt{2(a^2x^2 + b^2y^2)}}{by + ax} = \frac{by\sqrt{2(a^2x^2 + b^2y^2)}}{by - ax} \\ = a^2 - b^2.$$

$$(அ - ப) \quad \sqrt{2(a^2x^2 + b^2y^2)} \left[\frac{ax}{by + ax} - \frac{by}{by - ax} \right] \\ = a^2 - b^2.$$

$$(அ - ப) \quad \sqrt{2(a^2x^2 + b^2y^2)} \left[-\frac{(a^2x^2 + b^2y^2)}{b^2y^2 - a^2x^2} \right] \\ = a^2 - b^2.$$

$$(அ - ப) \quad \{\sqrt{2(a^2x^2 + b^2y^2)}\} \{a^2x^2 + b^2y^2\} \\ = (a^2 - b^2)(a^2x^2 - b^2y^2).$$

இதை வர்க்கப்படுத்தினால்,

$$2(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = (a^2 - b^2)^2(a^2x^2 - b^2y^2)^2.$$

பயிற்சி 7.3.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நன் வட்டத்தில் $4x - 5y = 0$ என்ற விட்டத்தின் நுண்ணிய விட்டத்தின் நுனிகளைக் காண்க.
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நன் வட்டத்தில் நுண்ணிய அரை விட்டங்களின் நுனிகளைச் செங்குமக் கோடு $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ எனின், $a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = 2p^2$ என நிறுவுக.
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நன் வட்டத் துண்ணிய அரை விட்டக் களைச் செங்குமக் கோடு $lx + my + n = 0$ எனின், $a^2l^2 + b^2m^2 = 2n^2$ என நிறுவுக.
4. நுண்ணிய அரைவிட்டங்களின் நுனிகள் P, Q எனின், நன் வட்ட மையத்திலிருந்து நான் PQ -வுக்கு வரையல் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளியின் இரண்டு வுநீர் காண்க.

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர்வு வட்டத்தின் துணையிய வட்டங்கள் PCP' , QCQ' . P புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு QCQ' -ஐ R -இல் வெட்டினால், $CQ \cdot PR$ ஒரு மாறிலி எனவும், R -இன் இயங்குவழி $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = \left(\frac{a^2 + b^2}{x^2 + y^2}\right)^2$ எனவும் திறவுக.
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர்வு வட்டத்தின் துணையிய வட்டங்கள் $x^2 + y^2 = r^2$ வட்டத்தை P , Q புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன எனில், PQ -வின் நடுப்புள்ளியின் இயங்குவழி
$$a^2[(x^2 + y^2)^2 - r^2x^2] + b^2[(x^2 + y^2)^2 - r^2y^2] = 0$$
 எனத் திறவுக.
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர்வு வட்டத்தின் துணையிய அரை வட்டங்களின் துணையியச் செங்குத்து கோடு, ஆதிமைய மையமாகக் கொண்ட மற்றொரு தீர்வு வட்டம் எனத் திறவுக.
8. P , Q புள்ளிகள் துணையிய அரை வட்டங்களின் துணிகள். C தீர்வு வட்டமையமெனில், CPQ முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டுச் செதியின் (orthocentre) இயங்கு வழிக் காண்க.
9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர்வு வட்டத்தின் பெரக்கத் துணையிய அரை வட்டங்களின் துணிகளிலிருந்து ஏற்குத் கோணங்கள் θ , ϕ எனில், $\tan^2 \theta + \tan^2 \phi$ ஒரு மாறிலி எனத் திறவுக.
10. தீர்வு வட்டத்தின் P புள்ளியிலிருந்து துணையியச் சமவட்டங்களுக்கு வரையும் குத்துக்கோடுகள் PL , PM எனில், P புள்ளியிலிருந்து அதன் இடைக்கோட்டிற்கு வரையும் குத்துக்கோடு LM -ஐ இரு சமமாகப் பிரிக்கும் எனத் திறவுக.
11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர்வு வட்டத்துத் துணையிய அரை வட்டங்களின் துணிகள் P , Q எனில், $(SP - SQ)^2 = PQ^2 - 4b^2$ எனத் திறவுக [S குவியங்களுள் ஒன்று].

12. $PCP', Q'Q'$ என்பவை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தின் துணையிய விட்டங்கள். $x^2 + y^2 = r^2$ வட்டத்தில் R யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனில்,

$PR^2 + QR^2 + P'R^2 + Q'R^2 = 2(a^2 + b^2 + 2r^2)$ என நிறுவுக.

13. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தின் மையம் C . P, Q தீர் வட்டத்தின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகள். P புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு CQ கோட்டிற்குத் துணையியக் கோடெனில், Q புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு CP -ய்க்குத் துணையியக் கோடு என நிறுவுக.

14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தில் $PCP', Q'Q'$ இரு துணையிய விட்டங்கள். CP, CQ' -இன் நீட்டம் இயங்கு வரைய L, M புள்ளிகளில் வெட்டினால் CLM மூக் கோணத்தின் குத்துக் கோட்டுச் சத்தி (அ - து) செங்கோட்டு மையம் (orthocentre), குவியம் ($ac, 0$) என நிறுவுக.

15. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தீர் வட்டத்தின் துணையிய அரை விட்டங்களின் மூலங்கள் P, Q . இப் புள்ளிகளிலிருந்து செங்கோடுகள் மேற்கூற மூலையே L, M புள்ளிகளில் வெட்டினால், $PL^2 + QM^2 = a^2(1-e^2)(2-e^2)$ என நிறுவுக.

விடைகள்

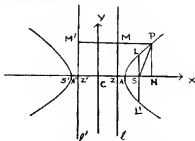
1. $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{4}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}} \right)$.
4. $2(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.
8. $2(a^2x^2 + b^2y^2)^2 = (x^2 - b^2)^2(b^2y^2 - a^2x^2)^2$.

8. அநுபரவகோவு (The Hyperbola)

8.1. அநுபரவகோவு—ஊதாபத

ஒரு கூம்பு வெட்டியின் ஊதாத்தொலை விகிதம் $e > 1$ எனின், அக்கூம்பு வெட்டி ஓர் அநுபரவகோவாகும்.

8.2. அநுபரவகோவின் சமன்பாடு—நிலமனடி அம்



படம் 80.

குவியம் S , இயக்குவரை l , ஊதாத்தொலை விகிதம் e எனக் கொள்வோம்.

S புள்ளியிலிருந்து இயக்குவரை l -க்கு SZ என்ற செங்குத்துக் கோடு வராக. SZ கோட்டை $e : 1$ விகிதத்தில் பிரிக்கவும். $e > 1$ ஆதலின் SZ கோடு குறித்த விகிதத்தில் உடனும் புறமும்

இரு புள்ளிகளில் பிரிக்கப்படும். உ.வ்ளும் புறமும் பிரிக்கும் புள்ளிகள் நுழைபெய A, A' என்போம்.

AA' கோட்டை C புள்ளியில் இரு சமபாகமாகப் பிரிக்கவும். $AA' = 2a$ எனில், $CA = CA' = a$.

வரைபுறங்களில் A, A' புள்ளிகள் அறிபரவெளவின் மீதமையும்.

$$\frac{SA}{AZ} = e = \frac{SA'}{A'Z}.$$

$$\therefore SA = e \cdot AZ \quad \dots \quad (1)$$

$$SA' = e \cdot A'Z \quad \dots \quad (2)$$

$$SA + SA' = e (AZ + A'Z).$$

$$(அ - ௨) \quad (CS - CA) + (CS + CA') = e \cdot 2a.$$

$$\therefore CS = 2ae.$$

$$(அ - ௨) \quad CS = ae.$$

$$SA' - SA = e (A'Z - AZ).$$

$$(அ - ௨) \quad 2a = e [(A'C + CZ) - (CA - CZ)] \\ = e [2CZ] \quad (\because CA = A'C).$$

$$\therefore CZ = \frac{a}{e}.$$

CZ கோட்டை x ஆயமாகவும், CZ -க்குச் செங்குத்தாக C வழிச் செங்குத்தும் கோட்டை y ஆயமாகவும் கொள்வோம்.

எனவே, C, S, Z புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்

$$(0, 0), (CS, 0), (CZ, 0).$$

$$(அ - ௨) \quad (0, 0), (ae, 0), \left(\frac{a}{e}, 0\right).$$

அதிபரவளைவின் கீறு $P(x_1, y_1)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின்,

$$\frac{SP}{PM} = e (>1)$$

[PM கோடு, இயக்கு வரை i -கூறுச் செங்குத்து].

$$\therefore SP^2 = e^2 PM^2.$$

$$SP^2 = (x_1 - ae)^2 + y_1^2,$$

$$PM^2 = ZN^2 = (CN - CZ)^2 = \left(x_1 - \frac{a}{e}\right)^2.$$

$$\therefore (x_1 - ae)^2 + y_1^2 = e^2 \left(x_1 - \frac{a}{e}\right)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{(அ - து)} \quad x_1^2 + a^2e^2 - 2x_1ae + y_1^2 &= e^2x_1^2 + a^2 - 2x_1ae \\ x_1^2(1 - e^2) + y_1^2 &= a^2(1 - e^2). \end{aligned}$$

$$\text{(அ - து)} \quad x_1^2(e^2 - 1) - y_1^2 = a^2(e^2 - 1).$$

இருபக்கமும் $a^2(e^2 - 1)$ ஆல் வகுப்பின்,

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ -இன் இயக்கு வர்த்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1.$$

$b^2 = a^2(e^2 - 1)$ எனப் குறிப்பிடுகின்.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

\therefore அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

8.3. அதிபரவளைவின் தவணைகூள்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(i) சமன்பாடு x, y ஆய்க்களுடன் சமச்சீர் உடையதாயிருப்பதால் (x_1, y_1) புள்ளி அதிபரவரினின் மீதிலுமின், $(-x_1, -y_1)$, $(x, -y_1)$, $(-x_1, y_1)$ புள்ளிகளும் வரினின் மீதமையும்.

(ii) (x_1, y_1) , $(-x_1, -y_1)$ புள்ளிகளைச் செங்கும் கோடு ஆதி $C(0, 0)$ வழிச் செல்வதால், C வழிச் செல்லும் அனைத்து நான்கினையும் C புள்ளி இரு சமமாகப் பிரிக்கும். C அதிபரவரினின் மையம் எனப்படும்.

(iii) x ஆயத்தை அதிபரவரினாய் $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. A , A' அதிபரவரினின் முனைகள் எனப்படும்.

சமன்பாட்டில் $x = 0$ எனப்பிரதியிடுவர்,

$$y^2 = -b^2 \text{ எனருகும்.}$$

$$(அ-து) \quad y = \pm \sqrt{-b^2}.$$

எனவே, அதிபரவரினாய் y ஆயத்தை மெய்வான புள்ளிகளில் வெட்டாது. (அ-து) வரினாய் y ஆயத்தைக் கற்பனைப் புள்ளிகளின் தாள் வெட்டும்.

y ஆயத்திற்குமீது B, B' புள்ளிகளை $CB = CB' = b$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் குறிக்கவும்.

AA' கோடு, அதிபரவரினின் குறுக்கக் கோடு (transverse axis) எனவும், BB' கோடு, அதிபரவரினின் துணை அச்ச (conjugate axis) எனவும் கூறப்படுகின்றன. குறுக்கக் கோடு, துணை அச்சின் நீளமாக முறையே $2a$, $2b$ ஆகும்.

$$(iv) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\therefore x^2 = a^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2} \right).$$

$$(அ - து) \quad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}.$$

எனவே, y -இன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், x மெய் மதிப்புக் கொண்டிருக்கும். y -இன் மதிப்பு அதிகெடுத்துக் கற்பநியை வெருங்கின், x -இன் மதிப்பும் அதிகெடுத்துக் கற்பநியை தெருங்கும்.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\therefore y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

$x > a$ எனின், y மெய் மதிப்புக் கொண்டிருக்கும்.

$x < a$ எனின், y -இன் மதிப்புக் கற்பனையாகும்.

(அ-து) $a, -a$ மதிப்புக்களுக்கு விடைப்பட்ட x -இன் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும், y -யின் மதிப்புக் கற்பனையாகும். எனவே, A புள்ளிக்கு இடமும், A' புள்ளிக்கு வலமும் வரினவு இருக்காது. (அ - து) A, A' புள்ளிகளுக்குவிடரிய அதிபரவரினவு இருக்காது.

\therefore அதிபரவரினவு நம்முள் வெட்டிக் கொள்ளாத இரு மீடுகள் கொண்டதாகும். ஒரு பகுதி A' -க்கு இடமும், மற்றொரு பகுதி A -யிக்கு வலமும் இருக்கும். ஒவ்வொரு மீடும் படத்தில் காட்டியுள்ளபடி கத்தழிவை நெருங்கும்.

குவியத்தின் ஆயத் தொலைகள் ($ae, 0$). இயக்கு வரையின் சமன்பாடு $x = \frac{a}{e}$ ஆகும்.

8-4. இரண்டானது குவியம், இயக்குவரை

CA' கோட்டின்மீது, [படம் 80, பத்தி 8-2] S', Z' புள்ளிகளை ஒன்றையே $CS = CS' = ae, CZ = CZ' = \frac{a}{e}$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும்.

CA' கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக Z' வழி $Z'M'$ கோடு வரையவும். $Z'M'$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக PM' கோடு வரையவும்.

S' புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் ($-ae, 0$).

$$PM' = NZ' = CN + CZ' = x + \frac{a}{e}.$$

அதிபரவரினவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$(அ-அ) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1,$$

$$(அ-அ) (e^2-1)x^2 - y^2 = a^2(e^2-1),$$

$$(அ-அ) x^2e^2 - x^2 - y^2 = a^2e^2 - a^2,$$

$$(அ-அ) x^2 + y^2 + a^2e^2 = a^2 + e^2x^2.$$

இரு பக்கமும் $2aex$ -ஐக் கூட்டினர்,

$$\begin{aligned} (x^2 + 2aex + a^2e^2) + y^2 &= e^2x^2 + 2aex + a^2 \\ &= e^2 \left[x^2 + \frac{2ax}{e} + \frac{a^2}{e^2} \right]. \end{aligned}$$

$$(அ-அ) (x+ae)^2 + y^2 = e^2 \left(x + \frac{a}{e} \right)^2 \quad \dots (1)$$

$P(x, y)$ அதிபரவளவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனில்,

$$S'P^2 = (x+ae)^2 + y^2;$$

$$PM'^2 = \left(x + \frac{a}{e} \right)^2$$

எனவே, சமன்பாடு (1)-ஐப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$S'P^2 = e^2 \cdot PM'^2$$

$$(அ-அ) \frac{S'P}{PM'} = e.$$

(அ-அ) அதிபரவளவின் மீதுள்ள P என்ற யாதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு S' புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரம், $Z'M'$ கோட்டிலிருந்து P யின் தூரத்தின் e மடங்காகும்.

எனவே, வரையறைப்படி $S', Z'M'$ என்பவை முறையே குவியம், இயக்குகளை ஆகின்றன. ஆனால் குவியம் S எனவும், இயக்குவரை ZM எனவும் நாம் முன்னரேக் கண்டோம்.

ஆகவே, S' இரண்டாவது குவியம் எனவும், $Z'M'$ கோடு இரண்டாவது இயக்குவரை எனவும் கூறப்படுகின்றன.

இரண்டாவது குவியம் S' -இன் ஆயத்தொலைகள் $(-ae, 0)$.
இரண்டாவது இயக்கு வரையின் சமன்பாடு $x = -\frac{a}{e}$.

8-5. செவ்வகம் (Latus Rectum)

குவியம் S' -இன் வழியாகக் குறுக்கக்கீகுச் செங்குத்தாக வரையப்படும் கோடு அதிபரவளைவை L, L' புள்ளிகளில் வெட்டினால், LSL' எனும் நான் அதிபரவளைவின் செவ்வகம் எனப்படும்.

L புள்ளியின் x ஆயத்தொலை

$$= S \text{ புள்ளியின் } x \text{ ஆயத்தொலை}$$

$$= -ae.$$

L புள்ளியின் நிலைத்தூரம் (ordinate) SL ஆதலின், அப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (ae, SL) .

L புள்ளி அதிபரவளைவின் மீதிருப்பதால்,

$$\frac{a^2 e^2}{a^2} - \frac{SL^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore (\text{அ} - \text{து}) \quad SL^2 = b^2(e^2 - 1)$$

$$= b^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} \quad [\because a^2(e^2 - 1) = b^4].$$

$$\therefore SL = \frac{b^2}{a}.$$

$$\text{எனவே, செவ்வக நீளம் } LSL' = 2SL = 2\frac{b^2}{a}.$$

8-6. அதிபரவளைவின் மீதுள்ள புள்ளியின் குவியத் தூரங்களின் மையபாடு ஒரு மாநிலியாகும்

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

குவியங்கள் $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$.

வளைவின்மீது $P(x, y)$ வரதேனும் ஒரு புள்ளி எனக் கொள்வோம்.

வளைவறையில் படி,

$$\frac{SP}{FM} = e = \frac{S'P}{PM'}$$

$$(அ-து) \quad SP = e \cdot PM = e \cdot NZ \quad [\text{படம் 80, பக்க 812}]$$

$$= e(CN - CZ)$$

$$= e\left(x - \frac{a}{e}\right) = ex - a.$$

$$S'P = e \cdot PM' = e(NZ')$$

$$= e(CN + CZ')$$

$$= e\left(x + \frac{a}{e}\right) = ex + a.$$

$$\therefore S'P - SP = (ex + a) - (ex - a)$$

$$= 2a$$

$$= \text{ஒரு மாறிலி (குறுக்கச்சின் நீளம்)}.$$

8.7. $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் நிலை

குறித்த புள்ளி $P(x_1, y_1)$ -இலிருந்து அறி பரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் குறுக்கச்சிற்கு PN என்ற செங்குத்துக் கோடு வரவரும்.

இஃது அறிபரவளைவை Q புள்ளியில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம்.

Q புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, NQ) .

$$\therefore \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{NQ^2}{b^2} = 1.$$

$$(அ-து) \quad NQ = \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2}.$$

P புள்ளி அதிபரவரிவவின் வெளிவே, மேலே அங்கு உள்ளே இருப்பதற்குத் தக்கவரது

$$NP > = < NQ \text{ ஆகும்.}$$

$$(அ-து) \quad y_1 > = < \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2}.$$

$$y_1^2 > = < b^2 \left[\frac{x_1^2}{a^2} - 1 \right].$$

$$(அ-து) \quad \frac{y_1^2}{b^2} > = < \frac{x_1^2}{a^2} - 1.$$

$$(அ-து) \quad 1 > = < \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

$$(அ-து) \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} < = > 1.$$

$$(அ-து) \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < = > 0.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ புள்ளி

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} < 1 \text{ எனின், வரிவவின் வெளிவேவும்,}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ எனின், வரிவவின் மேலும்,}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} > 1 \text{ எனின், வரிவவின் உள்ளேவும்}$$

இருக்கும்.

மாதிரி 1 : அதிபரவரிவவு ஒன்றின் குவியம் $(2, 1)$. ஒத்த இவர்க்கு வரை $2x + 3y - 1 = 0$, வரவத் தொலைவில்தம் $e = 2$ எனின், அதன் சமன்பாடு காண்க.

அதிபரவரிவவின் மீதுள்ள வரதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனின்,

குறியை $S(2, 1)$ -இலிருந்து P புள்ளிக்கு உள்ள தூரம்

$$SP = \sqrt{(x_1-2)^2 + (y_1-1)^2}.$$

$2x + 3y - 1 = 0$ இயக்கு வரையிலிருந்து P -விலிருந்து தூரம்

$$PM = \frac{2x_1 + 3y_1 - 1}{\pm \sqrt{4 + 9}}.$$

வரையிலின் படி,

$$SP = e \cdot PM,$$

$$\therefore SP^2 = e^2 \cdot PM^2.$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad (x_1-2)^2 + (y_1-1)^2 = 4 \cdot \left(\frac{2x_1+3y_1-1}{18} \right)^2.$$

$$\begin{aligned} \therefore 18[x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 - 2y_1 + 5] \\ = 4[4x_1^2 + 9y_1^2 + 1 + 12x_1y_1 - 4x_1 - 6y_1]. \end{aligned}$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad 8x_1^2 + 46x_1y_1 + 8y_1^2 + 36x_1 + 2y_1 - 61 = 0.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயங்குமூலம் (அ-ஆ) அடிப்படையிலே சமன்பாடு

$$8x^2 + 46xy + 8y^2 + 36x + 2y - 61 = 0.$$

மாதிரி 2 : $6x^2 - 16y^2 = 144$ அநுபரவியின் அச்சங்களின் நீளம், மையம், குறியெண், மையத்தொலை வித்தம், செங்குத்துத் திண் நீளம் ஆகியவை காண்க.

$$6x^2 - 16y^2 = 144.$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

எனவே, குறுக்கச்சின் நீளம் $2a=2 \cdot 4=8$.

துணை அச்சின் நீளம் $2b=2 \cdot 3=6$.

மையம் $(x=0, y=0)$, (அ-ஆ) $(0, 0)$.

அமையத் தொலை விதிதம் e , இவ்வரும் சமன்பாட்டின்படித் து கிடைக்கப் பெறும்.

$$b^2 = a^2(e^2 - 1),$$

$$9 = 16(e^2 - 1),$$

$$\therefore e^2 - 1 = \frac{9}{16},$$

$$\therefore e^2 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16},$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad e = \frac{5}{4}.$$

$$\text{குவிவங்கள் } (ae, 0), \quad (-ae, 0),$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad (5, 0), \quad (-5, 0).$$

$$\text{செவ்வகத்தின் நீளம்} = \frac{8b^2}{a} = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}.$$

3-8. அபயவளைவின் சமன்பாடு, தீர்வு வட்டத்தின் சமன்பாட்டின்படி, விருத்த b^2 -இன் குறியின் மட்டும் வேறுபட்டுள்ளது. எனவே, தீர்வு வட்டத்திற்குப் போருத்தும் பரவளைவு முடிவுகள் b^2 -க்குப் பதிலாக $-b^2$ எனப் பிரதியிடுவர். அபிபரவளைவுகளும் போருத்தும்.

கீழ்க்காணும் முடிவுகள் மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியாக விடப் பட்டுள்ளன.

$$\text{அதிபரவளைவு } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ என்ற அதிபரவளைவுக்கு}$$

(i) $y = mx + c$ கோடு, தொடு கோட்டாக அமையத் தேவை. வான்கட்டுப்பாடு

$$c = \sqrt{a^2 m^2 - b^2} \quad [\text{பத்தி } 7 \cdot 10].$$

(ii) (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad [\text{பத்தி } 7 \cdot 11].$$

(iii) $lx + my + n = 0$ கோடு, தொடு கோட்டாக வந்ததை
தென்பதான கட்டுப்பாடு

$$a^2l^2 + b^2m^2 = n^2 \quad [\text{அத்தியாயம் 7-மாதிரி 5(a)}].$$

(iv) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ தொடு கோடுகளில், நேரலை
வரைய கட்டுப்பாடு

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha \quad [\text{பகுதி 7.1-21}].$$

(v) (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு

$$\frac{ax}{x_1} + \frac{by}{y_1} = a^2 + b^2 \quad [\text{பகுதி 7.14}].$$

(vi) குத்துத் தொடு கோடு வட்டம்

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2 \quad [\text{அத்தியாயம் 7-மாதிரி 4}].$$

(vii) துணை வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad [\text{பகுதி 7.15}].$$

(viii) (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின்
தொடு நாளின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad [\text{பகுதி 7.20}].$$

(ix) (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வரையும் இட்டைத் தொடு
கோடுகளின் சமன்பாடு

$$T^2 = SS_1 \quad [\text{பகுதி 7.32}].$$

$$\begin{aligned} (\text{அ-து}) \left[\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 \right]^2 \\ = \left[\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right] \left[\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right]. \end{aligned}$$

(x) (x_1, y_1) -ஐ நடுபுள்ளியாகக் கொண்ட நாளின் சமன்
பாடு

$$T = S_1.$$

$$(\text{அ-து}) \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \quad [\text{பகுதி 7.33}].$$

(xi) (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \text{[பத்தி 7-27].}$$

(xii) $l_1x + m_1y + n_1 = 0, l_2x + m_2y + n_2 = 0$

துணையியக் கோடுகளாக அமைந்த நேரவரையான கட்டுப்பாடு

$$a^2l_1l_2 - b^2m_1m_2 = n_1n_2 \quad \text{[பத்தி 7-31].}$$

(xiii) $lx + my + n = 0$ கோட்டின் இசைப்புள்ளி

$$-\frac{a^2l}{n}, +\frac{b^2m}{n} \quad \text{[பத்தி 7-28].}$$

(xiv) $y = m_1x, y = m_2x$ கோடுகள் துணையிய விட்டங்கள்
களாக அமைந்த நேரவரையான கட்டுப்பாடு

$$m_1m_2 = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{[பத்தி 7-36].}$$

8-9. அதிபரவரிவின் துணையிய விட்டங்கள் இரண்டின் மூன்று
மட்டும் உள்ளன என்பதனை புரண்களில் வெட்டும்

அதிபரவரிவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \dots \dots (1)$$

அதிபரவரிவு (1)-இன் துணையிய விட்டங்கள்

$$y = m_1x, y = m_2x \text{ எனில்,}$$

$$m_1m_2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

$y = m_1x$ விட்டம் அதிபரவரிவு (1)-ஐ வெட்டும் புள்ளி
களில் x ஆகத் தோல்களைப் பின் வரும் சமன்பாட்டின் மூலம்
பெறலாம்.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(m_1x)^2}{b^2} = 1.$$

$$(அ - ௮) \quad x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2m_1^2}.$$

$$\therefore x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m_1^2}} \quad \dots \quad (2)$$

இவ்வாறே, $y = m_2 x$ விட்டும் அதிபரவளைவு ()-ஐ வெட்டுதல் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள்

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 m_2^2} \\ &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 \left(\frac{b^2}{a^2 m_1^2} \right)} \\ &= \frac{a^4 b^2 m_1^2}{a^2 b^2 m_1^2 - b^4} \\ &= \frac{a^4 m_1^2}{a^2 m_1^2 - b^2} \\ \therefore x &= \pm \frac{a^2 m_1}{\sqrt{a^2 m_1^2 - b^2}} \quad \dots \quad (3) \end{aligned}$$

$a^2 m^2 - b^2 > 0$ எனில், $y = m_1 x$ அதிபரவளைவை மெய்யான புள்ளிகளிலும், $y = m_2 x$ அவ்வளைவைக் கற்பனைப்புள்ளிகளிலும் வெட்டும்.

$b^2 - a^2 m^2 > 0$ எனில், $y = m_1 x$ அதிபரவளைவை மெய்யான புள்ளிகளிலும், $y = m_2 x$ அவ்வளைவைக் கற்பனைப் புள்ளிகளிலும் வெட்டும்.

எனவே, இரு துணையிய விட்டங்களில், ஒரு விட்டம் மட்டுமே அதிபரவளைவை மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டும்.

பாதி 3 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் தொடுகோடு குத்துத் தொடுகோடு விட்டத்தினை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டுமெனில், CP, CQ கோடுகள் துணையிய விட்டங்கள் என நிறவுக.

$$\text{அதிபரவளைவு } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{குத்துத் தொடுகோடு விட்டம் } x^2 + y^2 = a^2 - b^2 \quad \dots \quad (2)$$

அதிபரவளைவு (1)-இன் தொடுகோடு

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 - b^2} \quad \dots \quad (3)$$

தொடுகோடு (3), வட்டம் (2)-ஐ P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினால், CP, CQ கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு, சமன்பாடு (2)-ஐச் சமன்பாடு (3)-இன் உதவியால் சமவகத்தானதாக மாற்றுவதன் மூலம் பெறலாம் (C அதிபரவளைவின் மையம்).

$\therefore CP, CQ$ கோடுகளின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = (a^2 - b^2) \left(\frac{y - mx}{\sqrt{a^2 m^2 - b^2}} \right)^2.$$

$$(அ-து) \quad (x^2 + y^2)(a^2 m^2 - b^2) = (a^2 - b^2)(y^2 + m^2 x^2 - 2mxy).$$

$$\therefore x^2(a^2 m^2 - b^2 - a^2 m^2 + b^2 m^2) + 2m(a^2 - b^2)xy + y^2(a^2 m^2 - b^2 - a^2 + b^2) = 0.$$

$$(அ-து) \quad x^2 b^2(m^2 - 1) + 2m(a^2 - b^2)xy + y^2 a^2(m^2 - 1) = 0.$$

$$(அ-து) \quad \frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{2m(a^2 - b^2)}{a^2(m^2 - 1)} xy + y^2 = 0 \quad \dots \quad (4)$$

CP, CQ கோடுகளின் தனித்தனியே சமன்பாடுகள் $y = m_1 x, y = m_2 x$ எனில், அவைகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0.$$

$$(அ-து) \quad m_1 m_2 x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^2 = 0 \quad \dots \quad (5)$$

சமன்பாடுகள் (4), (5)-ஐ ஒப்பிடுவர்,

$$m_1 m_2 = \frac{b^2}{a^2} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, CP, CQ துணையிய வட்டங்களாகும்.

மேலும் 4: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் குவியல்கள்

S, S' -ஐச் சேர்க்கும் கோட்டை வட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டத் திற்கு அதிபரவளைவின் தாள் தொடுகோடுகளில், அந் தாளின் அதிபரவளைவைச் சேர்ந்த இயைபு புள்ளியில் இயங்கு வழிக் காண்க.

அதிபரவரின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

அதன் குவியர்கள் S, S' எனில், அவைகளின் ஆயத் தொகைகள் மூன்றாவது,

$$(ae, 0), (-ae, 0).$$

SS' கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்

$$(x-ae)(x+ae) + (y-0)(y-0) = 0.$$

$$(அ-து) \quad x^2 + y^2 = a^2e^2 \quad \dots \quad (2)$$

அதிபரவரின் தான் PQ எனவும், அத் தானில் அதிபர வரையவை சாத்த இயைப்புகளில் (x_1, y_1) எனவும் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியின் இயைக்கோடு (அ-து) PQ தானின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (3)$$

தான் PQ , வட்டம் (2)-இன் தொடுகோட்டெனில், வட்ட-மையத்திற்குத் PQ கோட்டிற்கு வரையும் செக்குத்துக் கோட்டின் தீனம், வட்ட ஆரத்திற்குச் சமம்.

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = ae.$$

$$\begin{aligned} (அ-து) \quad \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} &= \frac{1}{a^2e^2} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \quad [\because b^2=a^2(e^2-1)]. \end{aligned}$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயைக்கு வழி

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2+b^2} \quad \text{எனும் நீதி வட்டமாகும்.}$$

மாதிரி 5: திணித்த புள்ளி ஒன்றின் வழிச் செல்லும் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் தாண்டகத்தை நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

(x_1, y_1) -ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் சமன்பாடு

$$T = S_1,$$

$$(அ-அ) \quad \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

இத்தான் (α, β) என்ற திணித்த புள்ளி வழிச் செல்லுமெனின்,

$$\frac{\alpha x_1}{a^2} - \frac{\beta y_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

$$(அ-அ) \quad \frac{x_1(x_1 - \alpha)}{a^2} - \frac{y_1(y_1 - \beta)}{b^2} = 0.$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவழி

$$\frac{x(x - \alpha)}{a^2} - \frac{y(y - \beta)}{b^2} = 0.$$

மாதிரி 6: அதிபரவளைவின் மையத்தில் செங்கோணத்தை ஏதும் தாண்டகத்தை நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

(x_1, y_1) -ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட (1)-இன் தானின் சமன்பாடு $T = S_1$.

$$(அ-அ) \quad \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \quad \dots \quad (2)$$

இத்தான் (2) அதிபரவளைவு (1)-ஐ வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q எனக் கொள்வோம். அதிபரவளைவின் மையம் C எனின், CP, CQ கோடுகளின் செந்த சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^4} = \left(\frac{\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2}}{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-ஆ)} \quad x^2 & \left[\frac{1}{a^4} - \frac{\frac{x_1^2}{a^4}}{\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \right)^2} \right] + \frac{\frac{2x_1 y_1}{a^2 b^2}}{\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \right)^2} \\ & + y^2 \left[-\frac{1}{b^4} - \frac{\frac{y_1^2}{b^4}}{\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \right)^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

$\angle PCQ = 90^\circ$ ஆகையால்,

x^2 -இன் கெட்டு y^2 -இன் கெட்டு $= 0$.

$$\begin{aligned} \therefore \left\{ \frac{1}{a^4} - \frac{\frac{x_1^2}{a^4}}{\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \right)^2} \right\} \\ + \left\{ \frac{1}{b^4} - \frac{\frac{y_1^2}{b^4}}{\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \right)^2} \right\} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{(அ-ஆ)} \quad \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} = \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^4}{b^4} \right) \left(\frac{1}{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}} \right)^2.$$

$$\text{(அ-ஆ)} \quad \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right)^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

பயிற்சி 8.1.

1. கீழ் வரும் அதிபரவளைவின் சமன்மயாட்டைக் காண்க.

(i) குவியம் $(1, 2)$, ஒத்த இயக்குவரை $2x + y - 1 = 0$.
மையத் தொலை விலிதம் $\sqrt{3}$.

(ii) குவியம் $(-1, -1)$, ஒத்த இயக்குவரை
 $x - y + 1 = 0$, மையத் தொலை விலிதம் 2.

(iii) குறுக்கீசு, நுணையக்க நீளங்கள் முறையே 8, 4
அவைகளின் செத்த சமன்பாடு $xy = 0$.

(iv) குவியங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் 16. மையத்
தொலை விலிதம் $\sqrt{2}$.

2. $9x^2 - 16y^2 - 72x - 82y - 16 = 0$ என்ற அதிபர
வளைவின் மையம், மையத் தொலை விலிதம், குவியங்கள்,
இயக்குவரைகள் காண்க.

3. $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y + 89 = 0$ என்ற அதிபர
வளைவின் மையம், குவியங்கள் காண்க.

4. $9(8x - 4y - 12)^2 - 4(4x - 3y - 12)^2 = 800$ என்ற
அதிபரவளைவின் மையம், குவியங்கள் காண்க.

5. $8x^2 - 12y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ என்ற அதி
பரவளைவின் மையம், மையத் தொலை விலிதம், அச்சக்
களில் நீளங்கள் காண்க.

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் தான் $x^2 + y^2 = c^2$
வட்டத்தின் தொடுகோடுகளில், அக் தாளின் தடுடு
புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) = c^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \text{ என நிறுவுக.}$$

7. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவைச் சாத்த $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
தன் வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியின் இறுக்ககோடு
தன் வட்டத்தைத் தொடுமென நிறுவுக.

9. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவுக்கு P புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு நுறுக்கச்சு Q புள்ளியில் வெட்டுகிறது. இப் பரவளைவுக்கு P -யிலிருந்து செங்கோட்டின் வீது குவிப்பக்கம் S, S' -இருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடுகள் $SL, S'L'$ எனின், இவைகளின் இசை இடை (harmonic mean) PQ என திறவுக.
9. $x^2 - y^2 = a^2$ என்ற வளைவின் மையம் C . இப் வளைவுக்கு P புள்ளியிலிருந்து தொடு கோட்டை C -யிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடு L புள்ளியிலும், அதிபரவளைவை M புள்ளியிலும் வெட்டுகிறதெனின், $CL \cdot CM = a^2$ என திறவுக.
10. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் மீதுள்ள P புள்ளியிலிருந்து $x^2 - y^2 = a^2$ என்ற வளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடு நான் LM எனின், அந் நானின் தூர புள்ளியின் இயங்கு வழி $(x^2 - y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ என திறவுக.
11. மையத்திலிருந்து d தொலைவிலுள்ள $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் நான்கு தம் இசை புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.
12. $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ வளைவின் பாடுதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -க்கு வரையும் இரு தொடுகோடுகள் ஆவங்களுடன் திரிபுக் கோணங்கள் (complementary angles) சிறர்க்கும் என திறவுக.
13. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் நான் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவைத் தொடுமெனின், அந் நானின் தூர புள்ளியின் இயங்கு வழி $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$ என திறவுக.
14. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் தொடுகோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தன் வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில்

அதிபரவரணவு

வெட்டு மெனின், PQ நரணின் தநீடு புள்ளியிற் இயங்கு
வழி $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ என திறவுக.

15. $\frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^4} = 1$ அதிபரவரணவின் P புள்ளியிலுத்தும்
செங்குகொடு துணையககர Q -என்க வெட்டுகிறது. S, S'
அதிபரவரணவின் குவியககரெனின், $SO^2, S'P$ ஒரு திற
வெண் என திறவுக.

விடைகள்

1. (i) $7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2x + 14y - 22 = 0$;
(ii) $x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 4y = 0$; (iii) $16x^2 - 9y^2 = 36$; (iv) $x^2 - y^2 = 36$
2. (i) $(-4, -1)$; $\frac{5}{4}$; $(1, -1)$; $(-8, -1)$; $5x + 4 = 0$;
 $5x + 36 = 0$.
3. $(1, -2)$, இவியககர $(1, 8)$, $(1, -7)$.
4. $\left(\frac{84}{25}, \frac{-12}{25}\right)$; $\left(\frac{84+15\sqrt{18}}{25}, \frac{-12+15\sqrt{18}}{25}\right)$;
 $\left(\frac{84-15\sqrt{18}}{25}, \frac{-12-15\sqrt{18}}{25}\right)$.
5. $(1, -2)$; $\frac{5}{4}$; 8; 8.
11. $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{d^2}$.

8-10. துணையககரகள்

(a sec θ, b tan θ) எனும் புள்ளி θ-இன் அறிந்து மறிப்புத்
கருவகும் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற பரவரணவின் பொருத்தம்.
எனவே θ இத் துணையககரகக் கொள்ளலாம்.

8-11. அதிபக கணவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இல் θ , ϕ புள்ளிகளைக் கொண்டும் தரணின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$P(\theta)$, $Q(\phi)$ என்பவை அதிபகவகைவு மீதிக்குக்கும் இரு புள்ளிகள் எனின. அவைகள்தம் ஆயத்தொலைகள் முறையே $(a \sec \theta, b \tan \theta)$, $(a \sec \phi, b \tan \phi)$.

\therefore தரணின் PQ-வின் சமன்பாடு

$$\frac{y - b \tan \theta}{b \tan \theta - b \tan \phi} = \frac{x - a \sec \theta}{a \sec \theta - a \sec \phi}.$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad y - b \tan \theta &= \frac{b(\tan \theta - \tan \phi)}{a(\sec \theta - \sec \phi)} (x - a \sec \theta) \\ &= \frac{b \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \right)}{a \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos \phi} \right)} (x - a \sec \theta) \\ &= \frac{b(\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi)}{a(\cos \phi - \cos \theta)} (x - a \sec \theta) \\ &= \frac{b \sin(\theta - \phi)}{a(\cos \phi - \cos \theta)} (x - a \sec \theta) \\ &= \frac{b \sin \frac{\theta - \phi}{2} \cos \frac{\theta + \phi}{2}}{a \sin \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}} (x - a \sec \theta) \\ &= \frac{b \cos \frac{\theta + \phi}{2}}{a \sin \frac{\theta + \phi}{2}} (x - a \sec \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad ay \sin \frac{\theta + \phi}{2} &= ab \tan \theta \sin \frac{\theta + \phi}{2} \\ &= bx \cos \frac{\theta - \phi}{2} - ab \sec \theta \cos \frac{\theta - \phi}{2}. \end{aligned}$$

இரு பக்கமும் மி.ஆல் வகுப்பின்,

$$\begin{aligned}
 \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} - \frac{x}{a} \cos \frac{\theta - \phi}{2} \\
 &= \tan \theta \sin \frac{\theta + \phi}{2} - \sec \theta \cos \frac{\theta - \phi}{2} \\
 &= \frac{1}{2 \cos \theta} \left[2 \sin \theta \sin \frac{\theta + \phi}{2} - 2 \cos \frac{\theta - \phi}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{2 \cos \theta} \left[\cos \frac{\theta - \phi}{2} - \cos \frac{\phi + 2\theta}{2} - 2 \cos \frac{\theta - \phi}{2} \right] \\
 &= - \frac{1}{2 \cos \theta} \left[\cos \frac{\phi + 2\theta}{2} + \cos \frac{\theta - \phi}{2} \right] \\
 &= - \frac{1}{2 \cos \theta} \left[2 \cos \frac{\theta + \phi}{2} \cos \theta \right] \\
 &= - \cos \frac{\theta + \phi}{2}.
 \end{aligned}$$

∴ PQ நாளின் சமன்பாடு

$$\frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} - \frac{x}{a} \cos \frac{\theta - \phi}{2} = - \cos \frac{\theta + \phi}{2}.$$

$$(அ - நு) \quad \frac{x}{a} \cos \frac{\theta - \phi}{2} - \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} = \cos \frac{\theta + \phi}{2}.$$

8.12. $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ அதி பரவணவில்}$$

$P(\theta)$, $Q(\phi)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாளின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta - \phi}{2} - \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} = \cos \frac{\theta + \phi}{2} \dots (1)$$

$Q(\phi)$ புள்ளி, $P(\theta)$ புள்ளியை தெருங்கி முடிவில் அதனுடன் பொருந்தும் போது PQ நான் P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடாகும்.

எனவே, சமன்பாடு (1)-இல், $\phi = \theta$ எனப் பிரதியிடுவர் $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta - \theta}{2} - \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \theta}{2} = \cos \frac{\theta - \theta}{2}.$$

$$(அ - து) \quad \frac{x}{a} \cos 0 - \frac{y}{b} \sin \theta = \cos \theta$$

$$(அ - து) \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \sin \theta = \cos \theta$$

இது பக்கமும் $\cos \theta$ -ஆல் வகுப்பின்,

$$\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{\cos \theta} - \frac{y}{b} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1.$$

$$(அ - து) \quad \frac{x}{a} \sec \theta - \frac{y}{b} \tan \theta = 1.$$

8-13. $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{அதிபரவளைவுக்கு}$$

$P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$\frac{x}{a} \sec \theta - \frac{y}{b} \tan \theta = 1.$$

$$\text{தொடுகோட்டின் சரிவு} = + \frac{b \sec \theta}{a \tan \theta}.$$

$$\text{எனவே, செங்கோட்டின் சரிவு} = - \frac{a \tan \theta}{b \sec \theta}$$

$\therefore P(\theta)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$y - b \tan \theta = - \frac{a \tan \theta}{b \sec \theta} (x - a \sec \theta).$$

$$(அ-து) \quad by \sec \theta - b^2 \sec \theta \tan \theta = -ax \tan \theta + a^2 \tan \theta \sec \theta.$$

$$(அ-து) \quad ax \tan \theta + by \sec \theta = (a^2 + b^2) \sec \theta \tan \theta.$$

இரு பக்கமும் $\sec \theta \tan \theta$ -வாக வரும்பின்,

$$\frac{x^2}{\sec^2 \theta} + \frac{by}{\tan \theta} = a^2 + b^2.$$

8-14. தொலைத் தொடுகோடுகள் (Asymptotes)

முடிவற்ற கத்தறியில் (infinity) இல்லாமல், ஆனால் அதிபர வணைவைக் கத்தறியுள்ளியில் (point at infinity) தொடும் கோடு, தொலைத்தொடு கோடு எனப்படும்.

8-15. தொலைத்தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$$y = mx + c \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{எனும் கோடு } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

எனும் அதிபரவணைவை வெட்டும்புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகள்,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

$$(\text{அ-அ}) \quad x^2 \left[\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} \right] - \frac{2mcx}{b^2} - \left(\frac{c^2}{b^2} + 1 \right) = 0.$$

$$(\text{அ-அ}) \quad x^2 (b^2 - a^2 m^2) - 2mcx - a^2 (b^2 + c^2) = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$y = mx + c$, அதிபரவணைவு (2)-இன் தொலைத் தொடு கோடுகளின், சமன்பாடு (4)-இன் தீர்வுகளின் மதிப்புகள் இரண்டும் கத்தறியாகும்.

$$\therefore b^2 - a^2 m^2 = 0, \quad mc = 0.$$

$$\text{எனவே, } m = \pm \frac{b}{a}, \quad c = 0.$$

\therefore தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

ப. வ. - 222

$$(அ-து) \quad y = \frac{b}{a} x, \quad y = -\frac{b}{a} x.$$

$$(அ-து) \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

$$(அ-து) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

சமன்பாடுகள் (5), (6)-இருந்து அதி பரவளையும், அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளும் எண்ணுதல்கில் மட்டும் வேறு பட்டிருக்கும் என அறிவலாம்.

$$8-16. \quad m = \pm \frac{b}{a}, \quad c \neq 0 \text{ எனின்,}$$

பத்தி 8-15-இல் சமன்பாடு (4)-இல், x^2 -இன் கெழு மட்டும் பூச்சியலாகும்.

\therefore சமன்பாடு (4)-இன் தீர்வுகளில் ஒன்று மட்டும் கத்தரி வாகும்.

எனவே, தொலைத் தொடுகோடுகளுக் கிணையாக உள்ள கோடுகள் அதி பரவளையை முடிவுள்ள புள்ளி (finite point) ஒன்றிலும், முடிவிலில் புள்ளி (point at infinity) ஒன்றிலும் வெட்டும்.

8-17. தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

$$(அ-து) \quad y = \pm \frac{b}{a} x.$$

இவைகள் ஆதிலுரிச் செல்லும் கோடுகள். மேலும், x ஆயத் துடன் இவைகள் சமச் சாய்வினுள்ளதாகல், x ஆயம் இவைகளுக் கிடைப்பட்ட கோணத்தின் உள்ளிரு சமவெட்டியாகும்.

இவ்விரு தொலைத் தொடுகோடுகளின் இடைவேயுள்ள கோணம் 2θ எனின்,

$$\tan \theta = \frac{b}{a}.$$

$$\therefore \sec^2 \theta = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2 c^2}{a^2} = c^2.$$

$$\therefore \sec \theta = c.$$

$$(\text{அ-து}) \quad \theta = \sec^{-1}(c).$$

எனவே, தொலைத் தொடுகோடுகளின் இடைவெயுள்ள கோணம் $2 \sec^{-1}(c)$.

$$(\text{அல்லது}) \quad 2 \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right).$$

8-18. ஆடுவிலிருந்து அடுபாவரைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள்

$$\text{அதிபரவரைவின் மையத்தில் (ஆதி) இருந்து } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

அதிபரவரைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$T^2 = SS_1.$$

$$\left(\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 \right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right)$$

$$(\text{அ-து}) \quad 1 = - \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad \left[\because \begin{matrix} x_1=0 \\ y_1=0 \end{matrix} \right].$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

இது தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடாகும்.

எனவே, தொலைத் தொடுகோடுகள், மையத்திலிருந்து அதிபரவரைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள் என வரைவதற்க்கலாம்.

8-19. அடுபாவரைவின் மீதுள்ள ஒரு புக்னியிலிருந்து தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத் தொகை ஒரு மாநிலியாகும்.

அதிபரவரைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

தொலைத் தொடு கோடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$(\text{அ-அ}) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

அதிபரவளவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனில், அப் புள்ளியிலிருந்து தொலைத் தொடு கோடுகளுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே,

$$\frac{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}, \quad \frac{\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}.$$

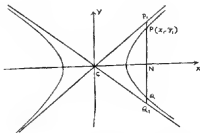
இவைகள்தம் பெருக்குத் தொகை

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \right) \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \left[\because \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \right] \\ &= \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

= ஒரு மாநிலி.

8-20. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி P -யிலிருந்து குறுக்கச்சுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு அதிபரவளைவை Q புள்ளியிலும், தொலைத்தொடு கோடுகளை P', Q' புள்ளிகளிலும் ஸெட்டிக்கும், $PP', QQ' = b^2$

P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனக்கொள்வோம். P புள்ளியிலிருந்து x ஆயத்திற்கு PN என்ற குத்துக்கோடு வரையவும். இது வளைவை மீண்டும் Q புள்ளியிலும், தொலைத்



படம் 81

தொடுகோடுகளை P' , Q' புள்ளிகளிலும் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore CN = x_1, \quad NP = y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2}$$

P' புள்ளி $y = \frac{b}{a}x$ என்ற நேரலைத் தொடுகோட்டில்லிது அமைத்திருப்பதால், P' புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(x_1, \frac{b}{a}x_1\right).$$

$$\begin{aligned} \therefore PP' &= NP' - NP = \frac{b}{a}x_1 - \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2} \\ &= \frac{b}{a}[x_1 - \sqrt{x_1^2 - a^2}]. \end{aligned}$$

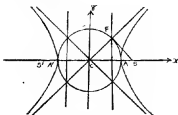
$$\text{இவ்வாறே, } QQ' = \frac{b}{a}x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}.$$

$$\begin{aligned} \therefore PP' \cdot QQ' &= \frac{b}{a}[x_1 - \sqrt{x_1^2 - a^2}] \cdot \frac{b}{a}[x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}] \\ &= \frac{b^2}{a^2}[x_1^2 - (x_1^2 - a^2)] \end{aligned}$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \cdot a^2$$

$$= b^2.$$

- 8-21. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபாவனைவின் குவியத்திலிருந்து தொலைத்தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்தாக கோட்டின் அடிப்புகளில் ஓத்த இயக்கு வரையும், துணை ஊட்டரும் ஊட்டும் முன்னியகும்



படம் 8B

குவியம் S-இன் ஆயத்தொலைகம் $(ae, 0)$. தொலைத்தொடுகோடு

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

எனக்கொள்வோம்.

கோடு (1)-க்குச் செங்குத்தாக S வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - 0 = -\frac{a}{b}(x - ae).$$

$$(அ-து) \quad ax + by = a^2e \quad \dots \quad (2)$$

இச்செங்குத்தாக்கோடு, தொலைத் தொடுகோட்டை வெட்டும்புள்ளி F எனக் கொள்வோம்.

$$(1)\text{-இலிருந்து } y = \frac{b}{a} x.$$

இதை (2)-இல் பிரதியிடும்,

$$ax + b \cdot \frac{b}{a} x = a^2 e.$$

$$(அ-து) \quad \frac{x}{a} (a^2 + b^2) = a^2 e.$$

$$\therefore x = \frac{a^2 e}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 e}{a^2 e^2} = \frac{a}{e}.$$

$$y = \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{e} = \frac{b}{e}.$$

எனவே, F புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e} \right)$.

இதிலிருந்து F புள்ளி $x = \frac{a}{e}$ என்ற இயக்கு வரையின் மேலாகவும் என்பது தெளிவாகிறது.

$$\begin{aligned} \text{மீண்டும், } CF &= \sqrt{\left(\frac{a}{e} - 0 \right)^2 + \left(\frac{b}{e} - 0 \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{e^2} + \frac{b^2}{e^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{e^2}} = \sqrt{\frac{a^2 e^2}{e^2}} \\ &= \sqrt{a^2} = a. \end{aligned}$$

இதிலிருந்து F புள்ளி $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற துணை வட்டத்தின் மேலாகவும் என அறிகிறோம்.

எனவே, F புள்ளி, துணை வட்டமும், ஒத்த இயக்கு வரையும் வெட்டும் புள்ளியாகும்.

8-22. $ax^3 + 3bxy + by^3 + 3cx + 3y + c = 0$ என்ற அதி பரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள் காணல்

அதி பரவளைவும், அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளும் ஆகஸ்களின் சமன்பாடுகளில் எண்ணுறுப்பில் மட்டுமே வேறுபட்டிருக்கும் என தாமஸ்ஸன்ஃக் கண்டோம்.

எனவே, அதி பரவளைவின் சமன்பாடு

$$ax^3 + 3bxy + by^3 + 3cx + 3y + c = 0 \text{ எனில்,}$$

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்த்த சமன்பாடு

$$ax^3 + 3bxy + by^3 + 3cx + 3y + c' = 0 \text{ ஆகும்,}$$

இச் சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளாகக் குறிக்கத் தேவை யான கட்டுப்பாட்டைப் பரப்படுத்தி C' மதிப்பைப் பெறலாம்.

மாதிரி 7: அதி பரவளைவுக்கு P புள்ளியிடத்து வரையுங் தொடுகோடு, தொலைத் தொடுகோடுகளை Q, R புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றதெனின், QR -இன் நடுப் புள்ளி P என நிறுவுக. அதி பரவளைவு மையம் C எனின், முக்கோணம் CQR -இன் பரப்புகாண்க.

அதி பரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(a \sec \theta, b \tan \theta)$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore P$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a} \sec \theta - \frac{y}{b} \tan \theta = 1 \quad \dots \dots (1)$$

இத் தொடுகோடு,

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \dots \dots (2)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \dots \dots (3)$$

என்ற தொலைத் தொடுகோடுகளை மூலையே Q , R புள்ளிகளில் சந்திக்கு மெனின், Q , R புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(\frac{a \cos \theta}{1 - \sin \theta}, \frac{b \cos \theta}{1 - \sin \theta} \right), \left(\frac{a \cos \theta}{1 + \sin \theta}, \frac{-b \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right).$$

QR கோட்டின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனின்,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{a \cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{a \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} a \cos \theta \left(\frac{1 + \sin \theta + 1 - \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} a \cos \theta \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{a}{\cos \theta} = a \sec \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{b \cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{-b \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} b \cos \theta \left(\frac{1 + \sin \theta - 1 + \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} b \cos \theta \cdot \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= b \tan \theta. \end{aligned}$$

(அ - ஆ) QR -இன் நடுப் புள்ளி $(a \sec \theta, b \tan \theta)$ ஆகும்.

இது P புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் ஆதலின், QR -இன் நடுப் புள்ளி P ஆகும்.

மீண்டும், C புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(0, 0)$ ஆதலின்,

$$\begin{aligned} \Delta CRQ &= \frac{1}{2} \left[\frac{a \cos \theta}{1 - \sin \theta} \left(\frac{-b \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a \cos \theta}{1 + \sin \theta} \left(\frac{-b \cos \theta}{1 - \sin \theta} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{-ab \cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} - \frac{ab \cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{-2ab \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right] \\
&= \frac{1}{2} [-2ab] \\
&= -ab.
\end{aligned}$$

எனவே, CQR மூக்கோணத்தில் $பரப்பு\ ab$ ஆகும்.

மாதிரி 8 : தொலைத்தொடு கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவரினவைச் சாத்தி இயைக்கோடு ஆத்தொலைத் தொடுகோட்டிற்கிண என நிறுவுக.

அதிபரவரினின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

தொலைத்தொடுகோடு

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{b} = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

எனின், அதன் சரிவு = $\frac{b}{a}$.

தொலைத் தொடுகோடு (2)-இன் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி (x_1, y_1) எனின், அப்புள்ளியின் (1)-ஐச் சாத்தி இயைக்கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

இதன் சரிவு = $\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^2 x_1}{a^2 \cdot \frac{bx_1}{a}} \quad \left[\because \frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b} = 0 \right] \\
&= \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

(அ-ஆ) தொலைத் தொடுகோடு (2)-இன் சரிவும், இயைக்கோடு (3)-இன் சரிவும் சமம்.

எனவே, இயைக்கோடு தொலைத்தொடு கோட்டிற்கு இணை.

மாதிரி 9: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் செங்கோட்டு தாண்டகத்தின் ஆதிபரவரைவைச் சார்ந்த இயைப்புள்ளிகளின் இயங்குமூலம் $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = (a^2 + b^2)^{-1}$ என நிறவுக.

$$\text{ஆதிபரவரைவு } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

ஆதிபரவரைவு (1)-இன் 0 புள்ளியில்துஞ்சு செங்கோடு

$$\frac{ax}{\sec \theta} - \frac{by}{\tan \theta} = a^2 + b^2 \quad \dots \quad (2)$$

கோடு (2)-இன் இயைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

$\therefore (x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயைக்கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3) ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{\frac{a}{\sec \theta}}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\frac{b}{\tan \theta}}{\frac{y_1}{b^2}} = a^2 + b^2,$$

$$\text{(அ-ஆ)} \quad \frac{a^2}{x_1 \sec \theta} = \frac{b^2}{y_1 \tan \theta} = a^2 + b^2.$$

$$\therefore \sec \theta = \frac{a^2}{x_1(a^2 + b^2)}, \quad \tan \theta = \frac{b^2}{y_1(a^2 + b^2)}$$

$$\therefore \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \text{ ஆகவே,}$$

$$\frac{a^4}{x_1^2(a^2 + b^2)^2} - \frac{b^4}{y_1^2(a^2 + b^2)^2} = 1.$$

∴ (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = (a^2 + b^2)^{-1}.$$

மாநி 10 : $4x + 3y - 7 = 0$, $x - 2y + 1$ என்ற தொலைத் தொடு கோடுகளாக கொண்ட அதிபரவளைவு (2, 3) புள்ளி வழிச் செல்லின், அதிபரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

தொலைத் தொடு கோடுகளில் சென்ற சமன்பாடு

$$(4x + 3y - 7)(x - 2y + 1) = 0.$$

எனவே, அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$(8 + 3y - 7)(x - 2y + 1) = K.$$

இது (2, 3) புள்ளி வழிச் செல்லின்,

$$(8 + 3 - 7)(2 - 6 + 1) = K.$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad K = (10)(-5) = -50.$$

∴ அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$(4x + 3y - 7)(x - 2y + 1) = -50.$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad 4x^2 + 3xy + 3y^2 - 11x + 11y + 57 = 0.$$

பயிற்சி 8.2.

1. $lx + my + n = 0$ கோடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் தொடுகோடுகளாக, தேவைபடி கட்டுப்பாடு காண்க.

2. $lx + my + n = 0$ கோடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் தொடுகோடுகளாக, தேவைபடி கட்டுப்பாடு காண்க.

3. ஒரு தேக்ககோடு அதிபரவளைவை P, Q புள்ளிகளிலும், அதன் தொலைத்தொடுகோடுகளை P', Q' புள்ளிகளிலும் வெட்டினால், $PP' = QQ'$ என நிறுவுக.

4. $3x^2 - 5y^2 = 8$ அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் இசைக்கோடு, அத் தொலைத் தொடுகோட்டிற்கு வீணா என நிறவுக.
5. அதிபரவளைவின் குவியங்களில் ஒன்று ஆதீபாலும், அதன் மையத் தொலை விதம் $\sqrt{2}$, ஒத்த இயக்குவரையு $x + y + 1 = 0$ எனில், அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க.
6. $9x^2 - 2y^2 + 4x - 6y = 0$ அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்த்த சமன்பாடு காண்க.
7. $8x^2 - 5xy - 2y^2 + 6x + 11y - 8 = 0$ அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளைக் காண்க.
8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ -இன் செங்கோடுகளுக்கு அதிபரவளைவின் மையத்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள்தம் இயக்குவரையு

$$\frac{a^4}{x^2} - \frac{b^4}{y^2} = \left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} \right)^2$$
 என நிறவுக.
9. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் செங்கோட்டு நான்களின் நடுப்புள்ளிகள்தம் இயக்குவரையு

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \left(\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} \right) = a^2 + b^2$$
 என நிறவுக.
10. C புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு, தொலைத் தொடு கோடுகளை L, M புள்ளிகளில் வெட்டினும், CLM முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தின் (circumcentre) இயக்குவரையு $4(a^2x^3 - b^2y^3)^2 = (a^2 + b^2)^3$ என நிறவுக.
11. தொலைத் தொடுகோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் 2α எனில், அதிபரவளைவின் மையத் தொலை விதம் $2a \cos \alpha$ என நிறவுக.

12. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் குவியங்கள் S, S' . குவியங்களிலிருந்து அதிபரவளைவின் தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் M, M' எனின், இவ்விரு புள்ளிகளின் துணைவட்டத்தின் மீதவையும் என நிறுவுக. $SM \cdot S'M' = b^2$ எனவும் நிறுவுக.
13. அதிபரவளைவு ஒன்றின் தொலைத் தொடுகோடுகளால் ஒன்று $x - 2y + 5 = 0$, மற்றொன்று $3x = 2y$ கோட்டிற்கு இணைகோடாகும். அதிபரவளைவு ஆதிவழிச் செல்கிறது. ஆதிவட்டத்து அதன் தொடுகோடு $x = y$ எனில், அதிபரவளைவின் சமன்பாடு காண்க. அதன் மையம் y ஆயத்தின் மீதவையுள்ளது என நிறுவுக.
14. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் தொடுகோடுகளாகத் அதன் மையத்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக்கோடுகள் தம் அடிப்புள்ளிகளின் இயங்குவழிக் காண்க.
15. $x^2 - y^2 = a^2$ அதிபரவளைவின் செங்கோட்டு நான்களின் தடுப் புள்ளிகளின் தம் இயங்குவழிக் காண்க.
16. $16x^2 - 9y^2 = 144$ அதிபரவளைவின் $x = 2y$ என்ற விட்டத்தின் துணைவிவ விட்டம் காண்க.
17. அதிபரவளைவின் செங்கோட்டிற்கு, அதன் மையத்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக்கோடு அதிபரவளைவை மெய்யான புள்ளிகளில் சந்திக்காது என நிறுவுக.
18. $5x^2 + 6xy + 2y^2 - 11x - 7y - 4 = 0$ என்ற அதிபரவளைவின் தொலைத்தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு காண்க.
19. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் தொடுகோடு, அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளால் அமைக்கும் மூக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சத்தி (centroid) மற்றொரு அதிபரவளைவின் மீதவையும் என நிறுவுக.

20. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் குவியங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டை வட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் தொடுகோடுகளின் அதிபரவளைவைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழிக் காண்க.

விடைகள்

1. $a^2n - b^2m^2 = n^2$, 2. $\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{n^2}$,
 5. $xy+x+y+1=0$, 6. $18x^2-12y^2+24x-8y-19=0$,
 7. $8x^2-5xy-2y^2+5x+11y-18=0$, 18. $(x-2y+3)(8x-2y+8)=0$, 14. $(x^2+y^2)=a^2x^2-b^2y^2$, 15. $(x^2-y^2)^2+4a^2x^2y^2=0$, 16. $82x-6y=0$, 18. $2x^2+5xy+2y^2-11x-7y+5=0$, 20. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2+b^2}$.

8-23. துணையிவ அதிபரவளைவு (Conjugate Hyperbola)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சு, துணையச்சு ஆகியவைகளை மூன்றாவது துணையச்சு, குறுக்கச்சாகக் கொண்ட அதிபரவளைவு கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபரவளைவின் துணையிவ அதிபரவளைவு எனப்படும்.

(அ - து) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவின் துணையிவ அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$(அ - து) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

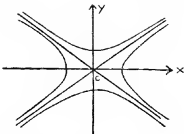
இவ்வேறு அதிபரவளைவுகளுக்கும்,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

என்ற தொலைத் தொடு கோடுகள் பொதுவானவை.

அதிபரவளைவு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \dots \dots (1)$$



படம் 88.

தொலைத் தொடு கோடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \dots \quad (2)$$

துணைவிவ ஆதிபரவணவு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \dots \quad (3)$$

ஆதிவை (α, β) புள்ளிக்கு மாற்றி, ஆவங்களை θ கோணம் சுழற்றினால், புது ஆவங்களைப் பொறுத்துச் சமன்பாடுகள் (1), (2), (3)

$$\frac{(\alpha + x \cos \theta - y \sin \theta)^2}{a^2} - \frac{(\beta + x \sin \theta + y \cos \theta)^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{(\alpha + x \cos \theta - y \sin \theta)^2}{a^2} - \frac{(\beta + x \sin \theta + y \cos \theta)^2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{(\alpha + x \cos \theta - y \sin \theta)^2}{a^2} - \frac{(\beta + x \sin \theta + y \cos \theta)^2}{b^2} = -1$$

என்றாகும்.

எனவே, ஆதிவை மாற்றிலும், ஆவங்களை மாற்றிலும் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு ஆதிபரவணவின் சமன்பாட்டிலிருந்து எண்ணுறப்பில் மட்டுமே வேறுபட்டிருக்கும்.

மேலும், துணைகிடை அதிபரவளைவின் சமன்பாடும் தொலைத் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டிலிருந்து அதே எண்ணுறப்பில் மாறுபட்டிருக்கும்.

ஆகவே, $H=0$, $A=0$, $C=0$ என்பவை மூன்றையே அதிபரவளைவு, தொலைத் தொடுகோடுகள், துணைகிடை அதிபரவளைவின் சமன்பாடுகளெனின்,

$$C - A = A - H$$

$$\therefore C = 2A - H$$

எனவே, துணைகிடை அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$2A - H = 0.$$

8-24. ஓர் அதிபரவளைவின் விட்டம் அல்லனைவை மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டுகொனின், இவ்விட்டத்தின் துணைகிடை விட்டம் அதனைக் கதம்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டும்.

$$\text{அதிபரவளைவு } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{துணைகிடை அதிபரவளைவு } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \dots \quad (2)$$

$y = m_1 x$ என்ற விட்டம் அதிபரவளைவு (1)-ஐ Q , Q' புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்ளோம். Q , Q' புள்ளிகளில் ஆவத் தொலைகள் மூன்றையே,

$$(a \sec \theta, b \tan \theta), (-a \sec \theta, -b \tan \theta) \text{ ஆகும்.}$$

இவ்விட்டத்தின் சரிவு

$$= \frac{b \tan \theta}{a \sec \theta} = \frac{b}{a} \sin \theta.$$

(அ - து) அதிபரவளைவை Q , Q' புள்ளிகளில் வெட்டும் விட்டத்தின் சமன்பாடு

$$y = \left(\frac{b}{a} \sin \theta \right) x \quad \dots \quad (3)$$

இதன் துணைவிவ விட்டம்,

$$y = \left(\frac{b}{a \sin \theta} \right) x \quad \dots \quad (4)$$

$$\left[\because \left(\frac{b}{a \sin \theta} \right) m_1 = \frac{b^2}{a^2} \right].$$

அதிபரவளைவு (1), விட்டம் (4) ஆகியவை வெட்டும் புள்ளி கள் சமன்பாடுகள் (1), (4)-இருந்து கிடைக்கப் பெறும்.

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{b}{a \sin \theta} x \right)^2}{b^2} = 1.$$

$$(அ-து) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2 \sin^2 \theta} = 1.$$

$$(அ-து) \quad \frac{x^2}{a^2} \left[1 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] = 1.$$

$$(அ-து) \quad x^2 \left(\frac{\sin^2 \theta - 1}{a^2 \sin^2 \theta} \right) = 1.$$

$$\therefore x^2 = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{-(1 - \sin^2 \theta)} = -a^2 \tan^2 \theta.$$

$$(அ-து) \quad x = \pm ia \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே, } y &= \frac{b}{a \sin \theta} x = \frac{b}{a \sin \theta} (\pm ia \tan \theta) \\ &= \pm ib \sec \theta. \end{aligned}$$

$\therefore y = \left(\frac{b}{a \sin \theta} \right) x$ விட்டம் அதிபரவளைவை ($a \sec \theta$, $ib \tan \theta$), ($-a \sec \theta$, $-ib \tan \theta$) என்ற மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டினால், துணைவிவ விட்டம் $y = \left(\frac{b}{a \sin \theta} \right) x$ அதிபரவளைவை ($ia \tan \theta$, $ib \sec \theta$), ($-ia \tan \theta$, $-ib \sec \theta$) என்ற கற்பனைப்புள்ளிகளில் வெட்டும்.

8-25. ஆதிபரவளைவின் துணைவிய விட்டங்கள், துணைவிய ஆதிபரவளைவுக்கும் துணைவிய விட்டங்களாகும்

ஆதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

இதன் துணைவிய விட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$y = m_1 x, \quad y = m_2 x$$

$$\text{எனின், } m_1 m_2 = \frac{b^2}{a^2} \quad \dots \quad (2)$$

துணைவிய ஆதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \dots \quad (3)$$

$$(\text{அ.து}) \quad \frac{x^2}{(-a^2)} - \frac{y^2}{(-b^2)} = 1.$$

$y = m_1 x, \quad y = m_2 x$ துணைவிய ஆதிபரவளைவின் துணைவிய விட்டங்களாக, எனின்,

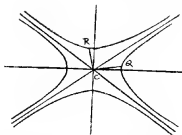
$$m_1 m_2 = \left(\frac{-b^2}{-a^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} \quad \dots \quad (4)$$

கட்டுப்பாடுகள் (2), (4) ஒன்றே யாதலின் $y = m_1 x, \quad y = m_2 x$ என்பவை, இரண்டு ஆதிபரவளைவுகளுக்கும் துணைவிய விட்டங்களாகும்.

8-26. ஆதிபரவளைவின் துணைவிய விட்டங்கள் ஆதிபரவளைவை வரும், துணைவிய ஆதிபரவளைவை வரும் Q, R புள்ளிகளில் செட்டுமெனின், $CQ^2 - CR^2 = (a^2 - b^2)$

$$\text{ஆதிபரவளைவு } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{துணைவிய ஆதிபரவளைவு } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \dots \quad (2)$$



படம் 34.

துணைவிய வட்டங்கள் அதிபரவரிசைகள் (1), (2)-ஐ முறையே Q, R புள்ளிகளில் வெட்டுமெனக் கொள்க.

Q புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் ($a \sec \theta$, $b \tan \theta$) எனில், CQ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$y = \frac{b \tan \theta}{a \sec \theta} x$$

$$(அ-து) \quad y = \left(\frac{b}{a} \sin \theta \right) x \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

துணைவிய வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$y = \left(\frac{b}{a \sin \theta} \right) x \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$\left[\because m_1 m_2 = \frac{b^2}{a^2} \right]$$

இஃது அதிபரவரிசை (2)-ஐ வெட்டும் புள்ளிகள் காணச் சமன்பாடுகள் (3), (4)-ஐத் தீர்க்க வேண்டும்.

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{\frac{b^2}{a^2 \sin^2 \theta} x^2}{b^2} = -1$$

$$(அ-து) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2 \sin^2 \theta} = -1$$

$$(அ-அ) \quad \frac{x^2}{a^2} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) = -1$$

$$(அ-அ) \quad \frac{x^2}{a^2} \left(\frac{\sin^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta} \right) = -1,$$

$$\therefore x^2 = - \frac{(\sin^2 \theta)(a^2)}{\sin^2 \theta - 1} = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= a^2 \tan^2 \theta.$$

$$\therefore x = \pm a \tan \theta.$$

$$y = \frac{b}{a \sin \theta} x = \frac{b}{a \sin \theta} (\pm a \tan \theta)$$

$$= \pm b \sec \theta.$$

எனவே, துணையகை விட்டால் துணையகை அதிபரவகையவ
($a \tan \theta$, $b \sec \theta$), ($-a \tan \theta$, $-b \sec \theta$) புள்ளிகளில் வெட்டும்.

R புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் ($a \tan \theta$, $b \sec \theta$) எனக் கொள்ளோம்.

$$CQ^2 = (a \sec \theta - 0)^2 + (b \tan \theta - 0)^2$$

$$= a^2 \sec^2 \theta + b^2 \tan^2 \theta.$$

$$CR^2 = (a \tan \theta - 0)^2 + (b \sec \theta - 0)^2$$

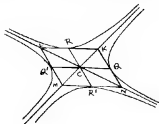
$$= a^2 \tan^2 \theta + b^2 \sec^2 \theta.$$

$$\therefore CQ^2 - CR^2 = a^2(\sec^2 \theta - \tan^2 \theta) + b^2(\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)$$

$$= (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)(a^2 - b^2)$$

$$= a^2 - b^2.$$

- 8-27. துணையிய விட்டங்களின் துணைவிட்டத்து அநிபரவனைவுக்கு வரையும் தொடு கோடுகளால் ஆகியும் இணைகாத்தின் உச்சிகள் தொலை தொடு கோடுகளின் மேலாகியும். இணைகாத்தின் பரப்பு ஒரு மாநிலி வாகும்



படம் 86

படத்தில் காட்டியுள்ளபடி QQ', RR' துணையிய விட்டங்கள் எனக் கொள்வோம்.

இப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்

$$Q(a \sec \theta, b \tan \theta), \quad Q'(-a \sec \theta, -b \tan \theta)$$

$$R(a \tan \theta, b \sec \theta), \quad R'(-a \tan \theta, -b \sec \theta).$$

$$\text{அநிபரவனைவு } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \dots (1)$$

$$\text{துணையிய அநிபரவனைவு } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \dots \dots (2)$$

அநிபரவனைவு (1)-க்கு Q புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a} \sec \theta - \frac{y}{b} \tan \theta = 1 \quad \dots \dots (3)$$

துணையிய அநிபரவனைவு (2)-க்கு R புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a} \tan \theta - \frac{y}{b} \sec \theta = -1 \quad \dots \dots (4)$$

இவைகளின் நம் வெட்டும் புள்ளி K எனக் கொள்க. சமன் பாடுகள் (3), (4)-இன் தீர்வுகள் K புள்ளியின் ஆயத்தொலைவுகளாகும்.

∴ K -யின் ஆயத்தொலைவுகள்

$$\left(\frac{a \cos \theta}{1 - \sin \theta}, \frac{b \cos \theta}{1 - \sin \theta} \right).$$

எனவே, K புள்ளி $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 0$ என்ற தொலைத் தொடு கோட்டின் மீதமையும்.

இவ்வாறே, இணைவரத்தின் மற்ற உச்சிகளும் தொலைத்தொடு கோடுகளின் மீதமையும்.

மீண்டும், $C(0, 0)$ புள்ளியிலிருந்து R புள்ளியைடத்துத் தொடு கோடு (4)-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் தீர்வு

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 \tan^2 \theta}{a^2} + \frac{\sec^2 \theta}{b^2} \right)} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sec^2 \theta + b^2 \tan^2 \theta}}.$$

$$CQ = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta + b^2 \tan^2 \theta}.$$

∴ இணைவரம் $KLMN$ -இன் பரப்பு

$$= 4 \times \text{இணைவரம் } CQKR\text{-இன் பரப்பு}$$

$$= 4 \left[\frac{ab}{\sqrt{a^2 \sec^2 \theta + b^2 \tan^2 \theta}} \cdot \sqrt{a^2 \sec^2 \theta + b^2 \tan^2 \theta} \right]$$

$$= 4ab$$

= மாறாது.

மாதிரி 11. அதிபரவளைவு, துணைவளைவு அதிபரவளைவு ஆகியவைகளின் மையத் தொலை விகிதங்கள் முறையே e_1, e_2 எனின்,

$$\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1 \text{ என நிறுவுக.}$$

அதிபரவரணலின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

இதில் $b^2 = a^2(e_1^2 - 1)$

(அ-து) $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = e_1^2.$

துணைவிவ அதிபரவரணலின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

இதில் $a^2 = b^2(e_2^2 - 1)$

(அ-து) $\frac{a^2 + b^2}{b^2} = e_2^2.$

எனவே, $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

மாடுத 12: அதிபரவரணலின் தொலைத் தொடுகோடுகள் $2x + y + 4 = 0$, $4x + 8y + 1 = 0$. இவ்வரணவரை $(-1, 2)$ ஁ள்ளி வழித் செல்வின், இதன் துணைவிவ அதிபரவரணலின் சமன்பாடு காண்க.

தொலைத்தொடு கோடுகளின் செத்த சமன்பாடு

$$(2x + y + 4)(4x + 8y + 1) = 0.$$

∴ அதிபரவரணலின் சமன்பாடு

$$(2x + y + 4)(4x + 8y + 1) + K = 0.$$

இது $(-1, 2)$ ஁ள்ளி வழித் செல்வின்,

$$(-2 + 2 + 4)(-4 + 8 + 1) + K = 0.$$

(அ-து) $K = -12.$

எனவே, அதிபரவரணலின் சமன்பாடு

$$(2x + y + 4)(4x + 8y + 1) = 12.$$

துணையிய அதிபரவரிவடிவின் சமன்பாடு

$$2A - H = 0.$$

$$\begin{aligned} (\text{அ} - \text{து}) \quad & 8(2x + y + 4)(4x + 8y + 1) \\ & - [(8x + y + 4)(4x + 8y + 1) - 12] = 0 \end{aligned}$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad (2x + y + 4)(4x + 8y + 1) - 12 = 0$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad 8x^2 + 10xy + 8y^2 + 18x + 18y + 16 = 0.$$

மீதிதொகு முறை :

தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$$(8x + y + 4)(4x + 8y + 1) = 0$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad 8x^2 + 10xy + 8y^2 + 18x + 18y + 4 = 0.$$

அதிபரவரிவடிவின் சமன்பாடு

$$8x^2 + 10xy + 8y^2 + 18x + 18y + K = 0.$$

இது $(-1, 2)$ புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$$8 - 20 + 12 - 18 + 28 + K = 0.$$

$$\therefore K = -8.$$

எனவே, அதிபரவரிவடிவின் சமன்பாடு

$$8x^2 + 10xy + 8y^2 + 18x + 18y - 8 = 0.$$

துணையிய அதிபரவரிவடிவின் சமன்பாடு

$$8x^2 + 10xy + 8y^2 + 18x + 18y + I = 0$$

என்ற வடிவிலிருக்கும்.

தொலைத் தொடு கோடுகளின் எண்ணுறுப்பு

$$= \frac{1}{2} [\text{அதிபரவரிவடிவின் எண்ணுறுப்பு} + \text{துணையிய அதிபரவரிவடிவின் எண்ணுறுப்பு}],$$

$$\therefore 4 = \frac{1}{2} [-8 + I].$$

$$8 = -8 + I.$$

எனவே, $l = 16$.

∴ துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$8x^2 + 10xy + 8y^2 + 18x + 18y + 16 = 0.$$

பயிற்சி 8.3.

- ஒர் அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடு கோடுகள் $x + 2y + 5 = 0$, $8x + 4y + 5 = 0$. இது $(1, -1)$ புள்ளி வழிச் செல்லின், இதன் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.
- $8x^2 - 8y^2 + 4x - 6y = 0$ -த்தின் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $9x^2 - 17y^2 + 12x - 12y - 19 = 0$ என நிறுவுக.
- $8x^2 - 6xy - 8y^2 + 17x + y + 14 = 0$ அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடு கோடுகளையும், துணையிய அதிபரவளைவையும் காண்க.
- CQ, CR என்பவை அதிபரவளைவின் துணையிய அரை விட்டங்கள் (semi-diameters). S, S' என்பவை அதன் குவியங்களின்கீழ் $SQ, S'Q = CR^2$ என நிறுவுக.
- அதிபரவளைவின் மீதுள்ள P புள்ளியிலிருந்து துணையிய அதிபரவளைவுக்கு வரையும் தொடு கோடுகள் PQ, PR எனின், QR கோடு அதிபரவளைவை P வழிச் செல்லும் விட்டத்தின் மறு ஹீஸில் தொடும் என நிறுவுக.
- துணையிய விட்டங்கள் அதிபரவளைவையும், அதன் துணையிய அதிபரவளைவையும் வெட்டும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு தொலைத்தொடு கோடு ஒன்றுக்கு இணை எனவும், இக் கோடு மற்றொரு தொலைத் தொடு கோட்டையும் இரு சமமாகப் பிரிக்கப்படும் எனவும் நிறுவுக.
- துணையிய அதிபரவளைவைத் தொடும் அதிபரவளைவின் தாண்டல் தொடு புள்ளியில் இரு சமமாகப் பிரிக்கப்படும் என நிறுவுக.
- அதிபரவளைவின் குறுக்கத்தின் மீதுள்ள P புள்ளியிலிருந்து தொலைத் தொடு கோட்டிற்கு வரையும் செங்

குத்துத் கோட்டின் அடிப் புள்ளி Q . அதிபரவளைவில் R புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு P வந்திச் சென்றது, QR கோடு துணைவக்கக்கு இணை என நிறவுக.

9. $(5, 8)$ புள்ளி வந்திச் செல்லும் ஓர் அதிபரவளைவின் மையம் $(1, 2)$. தொலைத் தொடுகோடுகள் $2x + 3y = 0$, $3x - 2y = 0$ என்ற கோடுகளுக்கிணை எனின், அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $(2x + 3y - 8)(3x - 2y + 1) = 110$ என நிறவுக. அதன் துணைவக அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

10. துணைவக அதிபரவளைவின் ஒரு மீதியின் மீதுள்ள வாதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதிபரவளைவுக்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் தொடு தாள் துணைவக அதிபரவளைவின் மற்றொரு மீதவைத் (branch) தொடுத் என நிறவுக.

விடைகள்

1. $8x^2 + 10xy + 8y^2 + 14x + 22y + 23 = 0$. 2. $8x^2 - 6xy - 2y^2 + 17x + y + 10 = 0$; $8x^2 - 6xy - 2y^2 + 17x + y + 8 = 0$.

8-27. செவ்வக அதிபரவளைவு (Rectangular Hyperbola)

தம்மன் செங்குத்தாய் வெட்டும் தொலைத் தொடுகோடுகளைக் கொண்ட அதிபரவளைவு செவ்வக அதிபரவளைவு எனப்படுக.

8-28. செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

(1)-இன் தொலைத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

இத் தொலைத் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாய் வெட்டு
பெனின், அகவகளின் சரிவகன் தம் பெருக்குத்தொகை = 1
ஆகும்.

$$\therefore \left(\frac{b}{a}\right) \left(-\frac{b}{a}\right) = -1$$

$$(அ-து) \quad b^2 = a^2$$

$$\therefore \quad b = a.$$

இதை (1)-இல் பிரதியிடுவர்,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$(அ-து) \quad x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{என்க்கும்.}$$

எனவே, செங்குக அதிபரவகளின் சமன்பாடு

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

8-29. செங்குக அதிபரவகளின் தொலைத்தொடுகோடுகள்

செங்குக அதிபரவகளின் சமன்பாடு

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{இன் தொலைத் தொடுகோடுகள்}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

இதில் $b = a$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 0$$

$$(அ-து) \quad x+y=0, \quad x-y=0.$$

எனவே, செங்குக அதிபரவகளின் தொலைத் தொடுகோடுகள்

$$(x+y)(x-y)=0$$

$$(அ-து) \quad x^2 - y^2 = 0.$$

8-30. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவையுக்கும் பொருத்தும் அனைத்து முடிவுகளும் $b=a$ எனப் பிரதியிடுவர், $x^2 - y^2 = a^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவையுக்கும் பொருத்தும்.

8-31. செவ்வக அதிபரவையின் கையத் தொலை விதிதம்

செவ்வக அதிபரவையின் கையத்தொலை விதிதம் e எனக் கொள்வோம்,

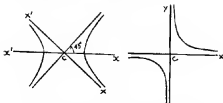
$$b^2 = a^2(e^2 - 1).$$

இதில் $b = a$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$a^2 = a^2(e^2 - 1).$$

$$\therefore e^2 = 2 \quad (\text{அது}) \quad e = \sqrt{2}.$$

8-32. தொலைத்தொடுகோடுகளை ஆயங்களாகக் கொண்ட செவ்வக அதிபரவையின் சமன்பாடு



படம் 88 (i)

படம் 88 (ii)

செவ்வக அதிபரவையின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் இடைவெறுள்ள கோணம் 90° . மேலும், தொலைத் தொடுகோடுகள் ஆயங்களாகச் சமச்சாய்வு கோண்டிருக்கும். எனவே, ஆதிகைய மாற்றமில் ஆயங்களை 45° -க்குச் சுழற்றினால் தொலைத் தொடுகோடுகளை ஆயங்களாகக் கொண்ட அதிபரவையு கிடைக்கும்.

பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்து வரையின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனவும், புதிய ஆயங்களைப்

பொறுத்து அதே புள்ளிகளில் ஆயத்தொலைகள் (X, Y) எனவும் கொள்வோம்.

மீண்டும், பத்தி 3-5-இல் படி

$$x = X \cos(-45) - Y \sin(-45) = \frac{1}{\sqrt{2}} (X + Y)$$

$$y = X \sin(-45) + Y \cos(-45) = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y - X).$$

பழைய ஆயங்கொம்பொறுத்துச் செங்குத்து ஆதிபரவலின் சமன்பாடு

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

எனவே, புதிய ஆயங்கொம்பொறுத்துச் செங்குத்து ஆதிபரவலின் சமன்பாடு

$$\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{Y-X}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2$$

$$(\text{அ-து}) \quad (X+Y)^2 - (Y-X)^2 = 2a^2$$

$$(\text{அ-து}) \quad 4XY = 2a^2$$

$$(\text{அ-து}) \quad XY = \frac{a^2}{2}.$$

$$c^2 = \frac{a^2}{2} \text{ எனக் கொண்டால்,}$$

$$\text{சமன்பாடு } XY = c^2 \text{ என்கிறது.}$$

பித்தொருமுறை :

தொலைத் தொடு கோடுகள் x, y ஆயங்களாதலின், அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$x = 0, y = 0 \text{ ஆகும்.}$$

\therefore தொலைத் தொடு கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$xy = 0.$$

\therefore ஆதிபரவலின் சமன்பாடு

$$xy = K.$$

(K ஒரு தலைமேன்).

அதிபரவளைவில் குறுக்கச்சித நீளம் $2a$ எனில், $CA = Ba$.
இங்கு A அதிபரவளைவின் மூலை.

A -வின் ஆயத் தொலைகள்

$$(CA \cos 45^\circ, CA \sin 45^\circ) \quad (\text{அ.து}) \quad \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}} \right).$$

$xy = K$ இல் புள்ளி ஊழிச் செல்லுவதால்,

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = K.$$

$$\therefore K = \frac{a^2}{2}.$$

எனவே, செய்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = \frac{a^2}{2}.$$

$$c^2 = \frac{a^2}{2} \text{ எனக் கொண்டால்,}$$

சமன்பாடு $xy = c^2$ என்றாகும்.

5-35. $xy=c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளைவுக்குப் பொருத்தும்
மேற்க்கண்ட முடிவுகளை எளிதில் நிறுவுக.

(i) (x_1, y_1) புள்ளியிலேத்துத் தொடு கோடு

$$\frac{1}{2}(xy_1 + x_1y) = c^2.$$

(ii) (x_1, y_1) புள்ளியிலேத்து வரையும் தொடு கோடுகளின்
தொடு நான்

$$\frac{1}{2}(xy_1 + x_1y) = c^2.$$

(iii) (x_1, y_1) புள்ளியின் இணைக் கோடு

$$\frac{1}{2}(xy_1 + x_1y) = c^2.$$

(iv) (x_1, y_1) புள்ளியிலேத்துச் செங்கோடு

$$xx_1 - yy_1 = x_1^2 - y_1^2.$$

(v) (x_1, y_1) -ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட தாளின் சமன்
மாடு $T = S_1$

$$(அ-து) \quad \frac{1}{2} (x_1 y_1 + x_1 y) - c^2 = x_1 y_1 - c^2.$$

(vi) (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வரையும் இரட்டைத் தொடு
கோடுகளின் சமன்பாடு $T^2 = SS_1$

$$(அ-து) \quad \left[\frac{1}{2} (x y_1 + x_1 y) - c^2 \right]^2 = (x y - c^2) (x_1 y_1 - c^2).$$

இவைகளின் தீர்மானங்கள் மாணவர்களுக்கு நம் பயிற்சியாக
விடப்பட்டுள்ளன.

8.34. துணையகை

$xy = c^2$ சமன்பாட்டில், t -யின் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும்
(பூச்சியத்தைத் தவிர்த்து) $x = ct, y = \frac{c}{t}$ பொருத்தும். எனவே,
செங்குத அதிபரவரிசைக்கு t -ஐத் துணையகைகாகக் கொள்ளலாம்.
அதாவது, செங்குத அதிபரவரிசை $xy = c^2$ -இல் புள்ளி ' t '-யின்
ஆயத்தொலைகள் $\left(ct, \frac{c}{t} \right)$ ஆகும்.

8.35. $xy = c^2$ செங்குத அதிபரவரிசையில் t_1, t_2 புள்ளிகளைக்
சேர்க்கும் தாளின் சமன்பாடு

செங்குத அதிபரவரிசையின் சமன்பாடு

$$xy = c^2.$$

இங் வரிசையின் மேலுள்ள $P(t_1), Q(t_2)$ புள்ளிகளின் ஆயத்
தொலைகள் முறையே

$$\left(ct_1, \frac{c}{t_1} \right), \left(ct_2, \frac{c}{t_2} \right)$$

எனக் கொள்வோம்.

∴ தாள் PQ-யின் சமன்பாடு

$$\frac{y - \frac{c}{t_1}}{\frac{c}{t_1} - \frac{c}{t_2}} = \frac{x - ct_1}{ct_1 - ct_2}.$$

$$(அ-து) \quad y - \frac{c}{t_1} = \frac{\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}}{\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}} (x - ct_1)$$

$$(அ-து) \quad y - \frac{c}{t_1} = - \frac{1}{t_1 t_2} (x - ct_1)$$

$$(அ-து) \quad yt_1 t_2 - ct_2 = -x + ct_1$$

$$(அ-து) \quad x + yt_1 t_2 = c(t_1 + t_2).$$

எனவே, PQ நாளின் சமன்பாடு

$$x + yt_1 t_2 = c(t_1 + t_2).$$

8.36. $P(t_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$P(t_1)$, $Q(t_2)$ புள்ளிகளைச் சேக்கும் செங்குத்து அதிபரவகோவு $xy = c^2$ -இன் நான்

$$x + yt_1 t_2 = c(t_1 + t_2) \quad \dots \quad (1)$$

Q புள்ளி P -ஐ மெருங்கி முடிவில் அதுனுடன் பொருத்தும் கோடு, நான் PQ புள்ளி P விடத்துத் தொடுகோடாகும்.

எனவே, சமன்பாடு (1)-இல் $t_2 = t_1$ எனப்பிரதிபிஷன்,

$$x + yt_1 t_1 = c(t_1 + t_1)$$

$$(அ-து) \quad x + yt_1^2 = 2ct_1.$$

எனவே, 't' புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு $x + yt = 2ct$.

8.37. தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

செங்குத்து அதிபரவகோவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2.$$

$P(t_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$x + yt_1 = 2ct_1 \quad \dots \quad (1)$$

$Q(t_2)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$x + yt_2 = 2ct_2 \quad \dots \quad (2)$$

ப. வ. = 24

இவ்விரு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைக் காட்டும்.

(1)-இலிருந்து (2)-ஐக் கழிப்பின்,

$$y(t_1^2 - t_2^2) = 2c(t_1 - t_2)$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad y(t_1 + t_2) = 2c.$$

$$\therefore \quad y = \frac{2c}{t_1 + t_2}.$$

இதை (1)-இல் பிரதிபலிக்கும்,

$$x + \frac{2ct_1^2}{t_1 + t_2} = 2ct_1,$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad x &= 2ct_1 - \frac{2ct_1^2}{t_1 + t_2} \\ &= \frac{2ct_1(t_1 + t_2) - 2ct_1^2}{t_1 + t_2} \\ &= \frac{2ct_1 t_2}{t_1 + t_2}. \end{aligned}$$

எனவே, t_1, t_2 புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்

$$= \frac{2ct_1 t_2}{t_1 + t_2}, \quad \frac{2c}{t_1 + t_2}.$$

8-38. புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

செய்யக்கூடிய அந் பரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2,$$

t புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$x + yt^2 = 2ct.$$

எனவே, அதன் சரிவு $= -\frac{1}{t^2}$.

\therefore செங்கோட்டின் சரிவு $= t^2$.

∴ t புள்ளியிலிருந்து செங்கோணம்

$$y - \frac{c}{t} = t^2(x - ct).$$

$$yt - c = xt^3 - ct^4$$

$$(அ - நு) \quad xt^3 - yt = ct^4 - c.$$

$$\therefore \quad xt - \frac{y}{t} = ct^3 - \frac{c}{t^3}.$$

எனவே, t புள்ளியிலிருந்து செங்கோண்டின் சமன்பாடு

$$xt - \frac{y}{t} = c \left(t^3 - \frac{1}{t^3} \right).$$

8.39. செங்குக அபிபரவனவின் உள் வரையப்பட்ட முக்கோணத்தின் (inscribed triangle) குத்துக் கோட்டு மையம் (orthocentre) செங்குக அபிபரவனவின் மீதமையும்.

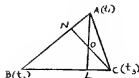
செங்குக அபிபரவனவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2.$$

இதனுள் வரையப்பட்ட முக்கோணத்தின் முனைகள் A, B, C எனக் கொள்வோம். அனவகனின் ஆயத் தொலைகள் முறையே

$$\left(ct_1, \frac{c}{t_1} \right), \left(ct_2, \frac{c}{t_2} \right), \left(ct_3, \frac{c}{t_3} \right)$$

எனவும் கொள்வோம்.



படம் 87.

AB கோட்டின் சமன்பாடு

$$x + y t_1 t_2 = C(t_1 + t_2).$$

$$AB \text{ கோட்டின் சரிவு} = -\frac{1}{t_1 t_2}.$$

எனவே, AB -க்குச் செங்குத்தாக C வழிச் செல்லும் CN கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - \frac{c}{t_2} = t_1 t_2 (x - c t_2)$$

$$(அ-து) \quad y - x t_1 t_2 = \frac{c}{t_2} - c t_1 t_2 t_2 \quad \therefore \quad \dots \quad (1)$$

இவ்வாறே, AL கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - x t_2 t_2 = \frac{c}{t_1} - c t_1 t_2 t_2 \quad \therefore \quad \dots \quad (2)$$

இவ்விரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி குத்துக்கோட்டு மையமாகும். இப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைவை சமன்பாடுகள் (1), (2)-இன் தீர்வுகளாகும்.

(1)-இலிருந்து (2)-ற்கு கழிப்பின்,

$$x(t_2 t_2 - t_1 t_2) = c \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right)$$

$$(அ-து) \quad x t_1 t_2 t_2 \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right) = -c \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right)$$

$$\therefore x = \frac{-c}{t_1 t_2 t_2}.$$

இம்மதிப்பை (1)-இல் பிரதியிடுகின்,

$$y - \left(\frac{-c}{t_1 t_2 t_2} \right) t_1 t_2 = \frac{c}{t_2} - c t_1 t_2 t_2$$

$$(அ-து) \quad y + \frac{c}{t_2} = \frac{c}{t_2} - c t_1 t_2 t_2.$$

$$\therefore y = -c t_1 t_2 t_2.$$

எனவே, குத்துக்கோட்டு மையம்

$$\left(\frac{-c}{f_1 f_2 f_3}, -cf_1 f_2 f_3 \right).$$

இப்புள்ளி $xy=c^2$ என்ற சமன்பாட்டில் பொருத்துமாதலின், குத்துக்கோட்டு மையம் 0, செங்கன அதிபரவணிகின் மீதமையும்.

மாதிரி 13: $xy=c^2$ செங்கன அதிபரவணிகில் (Bh, Bk) என்ற நிலைத்த புள்ளி வழிச் செல்லும் நான்கு நடுப்புள்ளிகளின் இயக்கு வழி

$$(x-h)(y-k)=hk \text{ என நிறுவுக.}$$

செங்கன அதிபரவணிகின் நான்கு AB எனவும், அதன் நடுப் புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore AB \text{ நான்கின் சமன்பாடு } T=S_1$$

$$(அ-து) \quad \frac{1}{8}(xy_1+x_1y)-c^2=x_1y_1-c^2$$

$$(அ-து) \quad xy_1+x_1y=2x_1y_1.$$

இது, (Bh, Bk) புள்ளி வழிச் செல்கின்ற,

$$2hy_1 + 2kx_1 = 2x_1y_1$$

$$(அ-து) \quad hy_1 + kx_1 = x_1y_1.$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயக்கு வழி

$$hy + kx = xy$$

$$(அ-து) \quad xy - kx - hy = 0.$$

இரு பக்கமும் hk -ஐக் கூட்டினால்,

$$xy - kx - hy + hk = hk.$$

$$\therefore (x-h)(y-k) = hk.$$

மாதிரி 14: $xy=c^2$ என்ற செங்கன அதிபரவணிகின் B நிலைமையான நான்கு நடுப் புள்ளிகளின் இயக்கு வழி $(x^2+y^2)(xy-c^2)=K^2xy$ என நிறுவுக.

செவ்வக அதி பரவலை விகித சமன்பாடு

$$xy = c^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இதன் நான்காவது ஒன்று AB எனவும், $AB = 2l$ எனவும் கொள்வோம்.

AB -யின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனின், நான் AB -யின் சமன் பரடு

$$T = S_1$$

$$(அ - ஐ) \quad \frac{1}{2} (xy_1 + x_1y) - c^2 = x_1y_1 - c^2$$

$$(அ - ஐ) \quad xy_1 + x_1y = 2x_1y_1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-இன் தீர்வுகள் A, B புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவாகும்.

அவைகள் $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ எனின்,

$$4l^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

(2)-இலிருந்து

$$y = \frac{2x_1y_1 - xy_1}{x_1}$$

இதை (1)-இல் பிரதியிடுவர்,

$$x \left(\frac{2x_1y_1 - xy_1}{x_1} \right) = c^2$$

$$(அ - ஐ) \quad 2xx_1y_1 - x^2y_1 = c^2x_1$$

$$(அ - ஐ) \quad x^2y_1 - 2x_1y_1x + c^2x_1 = 0.$$

இவைகளின் மூலங்கள் x_2, x_3 ஆகவின்

$$x_2 + x_3 = \frac{2x_1y_1}{y_1} = 2x_1$$

$$x_2x_3 = \frac{c^2x_1}{y_1}.$$

$$\therefore (x_2 - x_3)^2 = (x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3$$

$$= 4x_1^2 - 4 \frac{c^2x_1}{y_1}.$$

$$\begin{aligned}
 (y_2 - y_3)^2 &= \left(\frac{c^2}{x_2} - \frac{c^2}{x_3} \right)^2 & \left(\because y &= \frac{c^2}{x} \right) \\
 &= \frac{c^4 (x_3 - x_2)^2}{(x_2 x_3)^2} \\
 &= \frac{c^4}{c^4 \frac{x_1^2}{y_1^2}} \left[4x_1^2 - 4c^2 \frac{x_1}{y_1} \right] \\
 &= \frac{y_1^2}{x_1^2} \left[\frac{4x_1^2 y_1 - 4c^2 x_1}{y_1} \right] \\
 &= \frac{4y_1 [x_1^2 y_1 - c^2 x_1]}{x_1^2}.
 \end{aligned}$$

சமன்பாடு (8)-இல் இம்மதிப்புகளைப் பிரதியிடுவர்,

$$\begin{aligned}
 4t^2 &= \left(4x_1^2 - \frac{4c^2 x_1}{y_1} \right) + \frac{4y_1}{x_1^2} (x_1^2 y_1 - c^2 x_1) \\
 &= 4x_1^2 - 4 \frac{c^2 x_1}{y_1} + 4y_1 - \frac{4c^2 y_1}{x_1} \\
 &= 4(x_1^2 + y_1^2) - 4c^2 \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{x_1} \right) \\
 &= 4(x_1^2 + y_1^2) - \frac{4c^2}{x_1 y_1} (x_1^2 + y_1^2).
 \end{aligned}$$

$$\therefore x_1 y_1 t^2 = x_1 y_1 (x_1^2 + y_1^2) - c^2 (x_1^2 + y_1^2)$$

$$(அ-ஆ) \quad x_1 y_1 t^2 = (x_1^2 + y_1^2) (x_1 y_1 - c^2).$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவழி

$$xy^2 = (x^2 + y^2) (xy - c^2).$$

மாதிரி 15 : $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவரிசையில் t_1 புள்ளி விடத்துச் செங்கோடு வரிசையை யீண்டும் t_2 புள்ளியில் வெட்டினால் $t_1^2 t_2 = -1$ என நிறுவுக.

செவ்வக அதிபரவரிசையின் சமன்பாடு

$$xy = c^2.$$

t_1 புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$xt_1 - \frac{y}{t_1} = c \left(t_1^3 - \frac{1}{t_1^3} \right).$$

இது t_2 புள்ளியில் வரையவை மீண்டும் சந்திக்கும் மொனின்,

$$ct_2t_1 - \frac{c}{t_2t_1} = c \left(t_2^3 - \frac{1}{t_2^3} \right)$$

$$(அ - ஆ) \quad t_1^3t_2^3 - 1 = \frac{t_1^6 - 1}{t_1}t_2$$

$$(அ - ஆ) \quad t_1^3t_2^3 - t_1 - t_2t_1^4 - t_2 = 0$$

$$\therefore \quad t_1^3t_2^3 - t_1^4t_2 + t_2 - t_1 = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad t_1^3t_2(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1) = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad (t_2 - t_1)(t_2t_1^3 + 1) = 0.$$

$$\therefore \quad t_1 \neq t_2, \quad t_1^3t_2 = -1.$$

மாதிரி 16 : $xy = c^3$ செவ்வக அதிபரவரையின் செங்கோட்டு தாள்கள்தம் இசைப் புள்ளியளின் இயங்கு வழி $(x^3 - y^3)^2 + 4c^3xy = 0$ என திறவுக.

$xy = c^3$ என்ற செவ்வக அதிபரவரையில் t புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$xt - \frac{y}{t} = c \left(t^3 - \frac{1}{t^3} \right) \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

செங்கோட்டின் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனின், அப்புள்ளியின் அதிபரவரையு $xy = c^3$ -ஐச் சாத்த இசைக் கோடு

$$\frac{1}{2} (xy_1 + x_1y) = c^3 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{t}{\frac{y_1}{2}} = \frac{\frac{-1}{t}}{\frac{x_1}{2}} = \frac{t^3 - \frac{1}{t^3}}{c}$$

$$(அ-து) \quad \frac{2t}{y_1} = -\frac{2}{x_1 t} = -\frac{t^4 - 1}{ct^3}.$$

$$\therefore t^2 = -\frac{y_1}{x_1}; \quad \frac{2}{tx_1} = \frac{1-t^4}{ct^3}$$

$$(அ-து) \quad \frac{t}{x_1} = \frac{1-t^4}{2c}.$$

$$\therefore \frac{t^2}{x_1^2} = \frac{(1-t^4)^2}{4c^2}$$

$$\text{எனவே, } \frac{-y_1}{x_1^2} = \frac{\left(1 - \frac{y_1^2}{x_1^2}\right)^2}{4c^2}$$

$$(அ-து) \quad \frac{-y_1}{x_1^2} = \frac{(x_1^2 - y_1^2)^2}{4c^2 x_1^4}$$

$$(அ-து) \quad 4c^2 x_1 y_1 + (x_1^2 - y_1^2)^2 = 0.$$

$$\text{எனவே, } (x_1, y_1) \text{ புள்ளியின் இயக்குவதி}$$

$$(x^2 - y^2)^2 + 4c^2 xy = 0.$$

8-10. $xy=c^2$ அதிபரவரிவவுக்குக் குறித்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து நான்கு செங்கோடுகள் வரையக்கூடும்.

செங்க வ அதிபரவரிவவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

t புள்ளியிலுந்து செங்கோடு

$$x_1 - \frac{y}{t} = c \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right),$$

இது (α, β) என்ற குறித்த புள்ளி வழிச் செல்லின்,

$$\alpha t - \frac{\beta}{t} = c \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right)$$

$$(அ-து) \quad \alpha t^3 - \beta = \frac{c}{t} (t^4 - 1)$$

$$(அ-து) \quad \alpha^4 - \beta^4 + \beta - \alpha = 0 \quad \dots \quad (3)$$

இது t -யின் நான்காம் சமன்பாடானதால் t -யிக்கு நான்கு மதிப்புகள் உண்டு. இவைகள் (α, β) புள்ளி வழிச் செல்லும் செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகளாகும். t -யின் மதிப்புகள் t_1, t_2, t_3, t_4 எனில், (α, β) புள்ளி வழிச் செல்லும் செங்கோடுகள் நான்கு எனத் தெளிவாகிறது.

$$\text{மேலும், } t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -\frac{\alpha}{c} \quad \dots \quad (3)$$

$$t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4 = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$$t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 = -\frac{\beta}{c} \quad \dots \quad (5)$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = -1 \quad \dots \quad (6)$$

$A(t_1), B(t_2), C(t_3)$ எனில், மூக்கோணம் ABC -யின் குத்துக் கோட்டின் மையம்

$$\left[-\frac{c}{t_1 t_2 t_3}, -\alpha t_1 t_2 t_3 \right] \quad \dots \quad (\text{மதி 8-86}).$$

சமன்பாடு (6)-இன்குத்து குத்துக் கோட்டு மையம்

$$\left[ct_4, \frac{c}{t_4} \right] \text{ என்கும்.}$$

இது நான்காவது அடிப் புள்ளியாகும்.

எனவே, குறித்த ஒரு புள்ளியிக்குத்து $xy = c^2$ எனும் செவ்வக அதிபரவரிசைக்கு வரையக் கூடிய செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகளின் எவையேனும் மூன்றும் அமைவும் மூக்கோணத்தின் குத்துக் கோட்டு மையம் நான்காவது புள்ளியாகும்.

8-41. செவ்வக அதிபரவரிசைவும் வட்டமும் கெட்டுப் புள்ளிகள்

செவ்வக அதிபரவரிசையின் சமன்பாடு

$$xy = c^2 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{வட்டம் } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + K = 0 \quad \dots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

செவ்வக அதிபரவளைவு (1)-இல் மீதுள்ள வாதேனும் ஒரு புள்ளி $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ எனப்படும்.

இது வட்டம் (2)-இல் மீதமைவுமொன்றி.

$$(ct)^2 + \left(\frac{c}{t}\right)^2 + 2g(ct) + 2f\left(\frac{c}{t}\right) + K = 0$$

$$(அ-து) \quad c^2t^2 + \frac{c^2}{t^2} + 2gct + 2f\frac{c}{t} + K = 0$$

$$(அ-து) \quad c^2t^4 + 2gct^2 + Kt^2 + 2fct + c^3 = 0 \quad (3)$$

இது t -வில் நூற்படிச்சமன்பாடானதின் t -விக்கு நான்கு மதிப்புக்கள் உண்டு. ஆகவே, t_1, t_2, t_3, t_4 எனக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு தீர்வுக்கும் ஒரு வெட்டும் புள்ளி கிடைக்கும்.

எனவே, செவ்வக அதிபரவளைவும், வட்டமும் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும்.

மேலும்,

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -\frac{2g}{c} \quad \dots \quad (3)$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_4 + t_1t_3 + t_2t_4 + t_1t_4 = \frac{K}{c^2} \quad \dots \quad (4)$$

$$t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_2t_3t_4 + t_1t_3t_4 = -\frac{2f}{c} \quad \dots \quad (5)$$

$$t_1t_2t_3t_4 = -1 \quad \dots \quad (6)$$

வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள்

$$\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right), \left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right), \left(ct_3, \frac{c}{t_3}\right), \left(ct_4, \frac{c}{t_4}\right).$$

x ஆயத் தொலைகளின் பெருக்கும் தொகை

$$ct_1 \cdot ct_2 \cdot ct_3 \cdot ct_4 = c^4 t_1 t_2 t_3 t_4 = c^4.$$

y ஆயத் தொலைகளின் பெருக்கும் தொகை

$$\frac{c}{t_1} \cdot \frac{c}{t_2} \cdot \frac{c}{t_3} \cdot \frac{c}{t_4} = \frac{c^4}{t_1 t_2 t_3 t_4} = c^4.$$

எனவே, வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொகையின் பெருக்குத்தொகை y ஆயத் தொகையின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம்.

மேலும், செவ்வக அதிபரவீனையில் l_1, l_2, l_3, l_4 எனும் புள்ளிகள் $l_1 l_2 l_3 l_4 = 1$ எனும் கூட்டுப்பாட்டிற்குப்பின் அதை நான்கும் ஒரே வட்ட வரையிலுள்ள புள்ளிகளாகும்.

மாதிரி 17: $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவீனையை ஒரு வட்டம் A, B, C, D புள்ளிகளில் வெட்டும். முக்கோணம் ABC -யின் குத்துக் கோட்டு ஹைம் O எனில், O, D ஆகிய புள்ளிகள் செவ்வக அதிபரவீனையின் விட்டத்தின் நுனிகளாகும் என திறவுக.

பத்தி 8-41-இன்படி A, B, C, D புள்ளிகளின் ஆயத் தொகைக் குறையே

$$\left(cl_1, \frac{c}{l_1} \right), \left(cl_2, \frac{c}{l_2} \right), \left(cl_3, \frac{c}{l_3} \right), \left(cl_4, \frac{c}{l_4} \right)$$

எனில் முக்கோணம் ABC -யின் குத்துக் கோட்டு ஹைம் பத்தி 8-89-இன்படி

$$\left(-\frac{c}{l_2 l_3 l_4}, -cl_1 l_2 l_3 \right).$$

பத்தி 8-41-இல் சமன்பாடு (8)-இன்படி,

$$l_1 l_2 l_3 l_4 = 1.$$

\therefore $\triangle ABC$ -யின் குத்துக் கோட்டு ஹைம்

$$O \left(-cl_4, -\frac{c}{l_4} \right)$$

D புள்ளியின் ஆயத்தொகை $\left(cl_4, \frac{c}{l_4} \right)$ ஆகையால், O, D ஆகிய புள்ளிகள் செவ்வக அதிபரவீனையின் விட்டத்தின் நுனிகளாகும்.

மாதிரி 18: O புள்ளியை ஹைமாகக் கொண்ட ஒரு செவ்வக அதிபரவீனையை, r ஆயகு ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டம் A, B, C, D புள்ளிகளில் வெட்டினால் $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 4r^2$ என திறவுக.

செய்வக அதிபரவையின் சமன்பாடு

$$xy = c^2 \quad \dots \quad (1)$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + K = 0 \quad \dots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

செய்வக அதிபரவையு (1)-ஐ வட்டம் (2) வெட்டும் புள்ளிகள் $A(t_1)$, $B(t_2)$, $C(t_3)$, $D(t_4)$ எனின், பந்தி 8.41-இன்படி,

$$\Sigma t_1 = -\frac{2g}{c}$$

$$\Sigma t_1 t_2 = \frac{K}{c^2}$$

$$\Sigma t_1 t_2 t_3 = -\frac{2f}{c}$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1.$$

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$$

$$= \left(c^2 t_1^2 + \frac{c^2}{t_1^2} \right) + \left(c^2 t_2^2 + \frac{c^2}{t_2^2} \right) \\ + \left(c^2 t_3^2 + \frac{c^2}{t_3^2} \right) + \left(c^2 t_4^2 + \frac{c^2}{t_4^2} \right)$$

$$= c^2 (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) \\ + c^2 \left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_3^2} + \frac{1}{t_4^2} \right)$$

$$= c^2 [(\Sigma t_1)^2 - 2 \Sigma t_1 t_2] + c^2 \left[\left(\Sigma \frac{1}{t_1} \right)^2 - 2 \Sigma \frac{1}{t_1 t_2} \right]$$

$$= c^2 [(\Sigma t_1)^2 - 2 \Sigma t_1 t_2] + c^2 \left[\left(\frac{\Sigma t_1 t_2 t_3}{t_1 t_2 t_3 t_4} \right)^2 - \frac{2 \Sigma t_1 t_2}{t_1 t_2 t_3 t_4} \right]$$

$$= c^2 \left[\frac{4g^2}{c^2} - \frac{2K}{c^2} \right] + c^2 \left[\frac{4f^2}{c^2} - \frac{2K}{c^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= 4g^2 - 2K + 4f^2 - 2K \\
 &= 4(g^2 + f^2 - K).
 \end{aligned}$$

வட்ட ஆரம் r ஆதலின்,

$$r^2 = g^2 + f^2 - K.$$

$$\therefore OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 4r^2.$$

பயிற்சி 8.4.

1. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவைச் சாத்திய $y^2=4ax$ பரவளைவின் தொடுகோடுகள்தம் இடைப்புள்ளிகள் இயங்குமுகக் காண்க.
2. $x^2=4ay$ பரவளைவின் தொடுகோடு $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவை A, B புள்ளிகளில் வெட்டினால் நான் AB -யின் தடுப்புள்ளி ஒரு நிலைத்த பரவளைவின் மீதமையும் என நிறுவுக.
3. $x^2+16y=0$ பரவளைவின் புள்ளியின் $xy=2a^2$ -ஐச் சாத்திய இடைக்கோடு $y^2=ax$ பரவளைவைத் தொடும் என நிறுவு.
4. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவுக்கு P புள்ளியிலிருந்துத் தொடுகோடு, தொலைத் தொடுகோடுகளை A, B புள்ளிகளில் வெட்டும். செவ்வக அதிபரவளைவின் மையம் C எனின், முக்கோணம் ABC -யின் பரப்பு ஒரு மாநிலி எனவும், AB -யின் தடுப்புள்ளி P எனவும் நிறுவுக.
5. செவ்வக அதிபரவளைவின் குவியங்கள் S, S' , மையம் C, F வளைவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின் $SP.S'P=CP^2$ என நிறுவுக.
6. m -யின் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் $y-mx=0, y+mx=0$ எனும் கோடுகள் $xy=c^2$ -இன் துணையிய விட்டங்கள் என நிறுவுக.
7. $xy=1$ எனும் செவ்வக அதிபரவளைவை ஒரு வட்டம் வெட்டும் புள்ளிகள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ எனின், $x_1x_3x_5x_4=y_1y_3y_3y_4=1$ என நிறுவுக.

8. $xy=c^2$ செய்வக அதிபரவரிவிற்கு $y^2=4ax$ பரவரிவையும் தொடுமிட வரையப்படும் முக்கோணங்கள் முடிவில் (infinite) என திறவுக.

9. $xy=c^2$ செய்வக அதிபரவரிவுக்கு (α, β) புள்ளியிலிருந்து வரையும் செங்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) எனின்,

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\alpha,$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4=\beta \text{ என திறவுக.}$$

10. (α, β) புள்ளியிலிருந்து சமமாகப் பிரிக்கப்படும் $xy=c^2$ செய்வக அதிபரவரிவின் தாளின் நீளம்

$$2\sqrt{\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha\beta-c^2)}{\alpha\beta}} \text{ எனக் காண்க.}$$

11. $xy=c^2$ செய்வக அதிபரவரிவும், $y^2=4ax$ பரவரிவும் வெட்டும் புள்ளிகளிலிருந்து தொடுகோடுகள் x ஆயத் துடல் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் θ_1, θ_2 எனின்,

$$\tan \theta_1 + 2 \tan \theta_2 = 0 \text{ என திறவுக.}$$

12. செய்வக அதிபரவரிவில் இரண்டான நகல்களை விட்டதாகக் கொண்ட வட்டங்கள் பொது அச்ச விட்டங்கள் என திறவுக.

13. ஒரு செய்வக அதிபரவரிவின் துணையிய விட்டங்கள் தொலைத் தொடுகோடுகளூடல் சமச் சாயவுடைபனவாக இருக்கும் என திறவுக.

14. $xy=c^2$ செய்வக அதிபரவரிவில் P, Q, R எந்தவாதேனும் மூன்று புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) எனின், PQR முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\frac{c^2(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{x_1x_2x_3} \text{ என திறவுக.}$$

15. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவரிசையில் $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளாவனவற்ற மூக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\frac{2c^2(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)} \text{ என நிறுவுக.}$$

16. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவரிசையில் தொடுகோடு $x + 8y = 8c$ எனவும், தொடுபுள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\frac{c}{8}$, $8c$ எனவும் நிறுவுக.

17. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவரிசையை ஒரு வட்டம் P, Q, R, S புள்ளிகளில் வெட்டுமெனின், கோடு PQ அதிபர வரிசை மையம் வழிச் செல்லின், RS வட்ட மையம் வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

18. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவரிசைக்கு P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு வரிசையை மீண்டும் Q புள்ளியில் சந்திக்குமெனின், PQ -வை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் P வழிச் செல்லும் விட்டத்தின் ஊழுவரிசையில் வரிசையை வெட்டும் என நிறுவுக.

19. (α, β) புள்ளியிலிருந்து $xy = c^2$ செவ்வக அதிபர வரிசைக்கு வரையும் செங்கோடுகளின் ஆயப் புள்ளிகள் $(0, 0)$, (α, β) புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் மற்றொரு செவ்வக அதிபரவரிசையின் மீதுள்ளன என நிறுவுக.

20. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவரிசையின் $P(I_1)$, $Q(I_2)$ புள்ளிகளைச் சேக்கும் நான் $R(I_3)$, $S(I_4)$ புள்ளிகளைச் சேக்கும் நான்குக்கும் செங்குத்தெனின், நான்கள் PR, QS நம்முள் செங்குத்தாக வெட்டும் என நிறுவுக.

21. $xy = c^2$ -இல் PQ என்ற நான் தொலைத் தொடுகோடு வின் R, S புள்ளிகளில் சந்திப்பின், $PR = QS$ என நிறுவுக.

22. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவரிசையின் ஒரு விட்டம் PQ , P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடும், Q புள்ளியிற் தொலைத் தொடுகோட்டிற்கிணையாக வரையும் கோடும் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவழி $xy + 8c^2 = 0$ என நிறுவுக.

23. $xy = c^n$ செவ்வக அதிபரவரணையில் ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொகைகள் ($c \tan \phi, c \cot \phi$). $\phi + \phi'$ ஒரு மாறாதி பெணின், ϕ, ϕ' புள்ளிகள் வரிக் செல்லும் நான்குகள் அதிபரவரணையின் துணையகரின் மையத்தின் நிலைத்த புள்ளி வரிக் செல்லும் என நிறவுக.
24. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவரணையின் PQ நான்குகளில் O புள்ளியில் செங்கோணத்தை ஏற்குமெனின், O புள்ளியிலிருந்து செங்கோலாய்ந்த PQ இவ்வகை என நிறவுக.
25. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவரணைக்கு (α, β) புள்ளியில் இருந்து வரையும் செங்கோலாகவின் அடிய புள்ளிகள் செவ்வக அதிபரவரணையும், $x^2 - y^2 = \alpha x + \beta y = 0$ எனும் செவ்வக அதிபரவரணையும் வெட்டும் புள்ளிகள் என நிறவுக.

விடைகள்

1. $ax^2 + 2c^2y = 0$.

9. இருபடியின் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல்

(General Equation of Second Degree,
Tracing of Conic)

9-1. கூம்பு வெட்டியின் மையத் தொலை விதிதம் e ஒத்துக்குச் சமமாகவோ, குறைவாகவோ, அதிகமாகவோ இருப்பின், கூம்பு வெட்டி ஒரு பாவனைவு, நீள் வட்டம் அல்லது அநி பாவனைவு என நாம் முன்னர்க் கண்டோம்.

மையத் தொலை விதிதம் $e=0$ எனின், $b^2 = a^2(1-e^2)$ என்பது $b^2 = a^2$ என்றாகும். இக் கூட்டுப்பாட்டில் நீள் வட்டம் வட்டமாகிறது. மேலும் குவியம் இயக்கு வரையில் பொதுத்துவெனின், கூம்பு வெட்டி இரட்டைக் கோடுகளாகின்றது. நீள் வட்டத்தில் அச்சக்களின் நீளங்கள் பூச்சியமெனின், நீள் வட்டம் ஒரு புள்ளியாகும். எனவே வட்டம், இரட்டைக் கோடுகள், புள்ளி ஆகியவைகளும் கூம்பு வெட்டிகளாகும்.

9-2. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன் பாடு எப்பொழுதும் ஒரு கூம்பு வளைவைக் குறிக்கும்.

x, y ஆயங்களிற் பொறுத்து இரு டியின் பொதுச் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{--- (1)}$$

ஆதிகப மாற்றமல் ஆயங்களை O கோணம் சுழற்றினால் கிடைக்கும் ஆயங்கள் X, Y ஆயங்கள் எனக் கொள்வோம்.

இருபுள்ளிச் பொதுச் சமன்பாடு, கூடிய வகைவு வரைதல் 367

யின், புது ஆய்க்களைப் (X , Y) பொறுத்து இருபுள்ளிச் பொதுச் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} & a(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 + 2h(X \cos \theta - Y \sin \theta)(X \sin \theta + Y \cos \theta) \\ & + b(X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 + 2g(X \cos \theta - Y \sin \theta) \\ & + 2f(X \sin \theta + Y \cos \theta) + c = 0 \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

என்றும். [பத்தி 8-6]

$$(அ-ஆ) \quad AX^2 + 2HXY + BY^2 + 2GX + 2FY + C = 0.$$

$$\text{இங்கு} \quad A = a \cos^2 \theta + 2h \sin \theta \cos \theta + b \sin^2 \theta.$$

$$H = -(a-b) \sin \theta \cos \theta + h(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

$$B = a \sin^2 \theta - 2h \sin \theta \cos \theta + b \cos^2 \theta.$$

சமன்பாடு (2)-இல் XY -வின் கெட்டு $2H$ ஆகும்.

$$2H = 0 \quad \text{எனின்,}$$

$$2(b-a) \sin \theta \cos \theta + 2h(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0$$

$$(அ-ஆ) \quad (b-a) \sin 2\theta + 2h(\cos 2\theta) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} (அ-ஆ) \quad \tan 2\theta &= \frac{2h}{a-b} \\ (அ-ஆ) \quad \theta &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

எனவே, $\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right)$ எனின், சமன்பாடு (2)-இல் xy கொண்டு உருபு இராது.

இச் சமன்பாடு (2)

$$AX^2 + BY^2 + 2GX + 2FY + C = 0 \quad \dots \quad (4)$$

என்றும்.

$$\begin{aligned} A+B &= (a \cos^2 \theta + 2h \sin \theta \cos \theta + b \sin^2 \theta) \\ &+ (a \sin^2 \theta - 2h \sin \theta \cos \theta + b \cos^2 \theta) \\ &= a(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + b(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= a + b. \end{aligned}$$

இவ்வாறே $H^2 - AB = h^2 = 0$ என நிறுவலாம்.

வகை (i) $A=B$ எனின், சமன்பாடு (4) ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

வகை (ii) $AB \neq 0$ (அ-து) $h^2 \neq 0$.

சமன்பாடு (4)-ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$A \left(x^2 + \frac{2G}{A}x \right) + B \left(y^2 + \frac{2F}{B}y \right) + C = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad A \left(x^2 + \frac{2G}{A}x + \frac{G^2}{A^2} \right) + B \left(y^2 + \frac{2F}{B}y + \frac{F^2}{B^2} \right) \\ = G^2 + F^2 - C \\ = K \text{ (என்க).} \end{aligned}$$

$$\text{(அ-து)} \quad A \left(x + \frac{G}{A} \right)^2 + B \left(y + \frac{F}{B} \right)^2 = K.$$

ஆதலால் $\left(-\frac{G}{A}, -\frac{F}{B} \right)$ புள்ளிக்கு மாற்றினால்,

$$AX^2 + BY^2 = K \quad \dots \quad (5)$$

என்குறும்.

$$K = 0 \text{ எனின், } AX^2 + BY^2 = 0.$$

\therefore சமன்பாடு இரட்டைக்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

A, B இரண்டும் அதே குறியைக் கொண்டிருப்பின் இரட்டைக் கோடுகள் கற்பினவாகும். A, B இரண்டும் எதிரெதிர்க் குறிகளைக் கொண்டிருப்பின் இரட்டைக் கோடுகள் மெய்யானவை.

$K \neq 0$ எனின், சமன்பாடு (5)

$$\frac{X^2}{\frac{K}{A}} + \frac{Y^2}{\frac{K}{B}} = 1 \text{ என்குறும்.}$$

இதில் $\frac{K}{A} + \frac{K}{B}$ இரண்டும் நேர்க்குறிகளைக் கொண்டிருப்பின், சமன்பாடு (5) ஒரு நீள் வட்டத்தைக் கொண்டுள்ளது. நேர்க்குறியும் மற்றொன்று எதிர்க்குறியும் கொண்டிருப்பின் ஓர் அதிபரவளைவைக் குறிக்கும்.

அதாவது $ab - h^2 > 0$, (அ-ஆ) $AB > 0$ எனின் நீள் வட்டமும், $ab - h^2 < 0$, (அ-ஆ) $AB < 0$ எனின் அதிபரவளைவும் ஆகும்.

$$\frac{K}{A} = -\frac{K}{B} \text{ எனின், (அ-ஆ) } A + B = 0.$$

($a + b = 0$) எனின், சமன்பாடு (5) ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவைக் குறிக்கும்.

$\frac{K}{A}, \frac{K}{B}$ இரண்டும் எதிர்க்குறிகளைக் கொண்டிருப்பின், சமன்பாடு (5) ஒரு கம்பள நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

கூடுதல் (iii) :

$$ab - h^2 = 0 \quad (\text{அ} - \text{ஆ}) \quad AB = 0.$$

$A = 0$, $B \neq 0$ எனக் கொள்வோம்.

எனவே, சமன்பாடு (4)

$$By^2 + BFy = -BGx - C \text{ என்றாகும்.}$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad B \left(y^2 + \frac{BF}{B} y + \frac{F^2}{B^2} \right) = \frac{F^2}{B} - BGx - C.$$

$$\therefore \quad B \left(y + \frac{F}{B} \right)^2 = \frac{F^2}{B} - BGx - C \quad (6)$$

$C = 0$ எனின்,

$$B \left(y + \frac{F}{B} \right)^2 = \frac{F^2}{B} - BGx.$$

எனவே, சமன்பாடு (4) இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$$G = 0, \quad \frac{F^2}{B} - C = 0 \text{ எனில்,}$$

$$\text{சமன்பாடு } B \left(y + \frac{F}{B} \right)^2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இவ் வகையில் அக்து இரு பொருத்தும் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$$G \neq 0 \text{ எனில்,}$$

சமன்பாடு (8)-ஐப் பின் வகுமசது மாற்றி எழுதலாம்.

$$(அ - து) \quad B \left(y + \frac{F}{B} \right)^2 = - \frac{1}{2} G \left(x + \frac{C}{2G} - \frac{F^2}{2BG} \right)$$

என்றும். ... (7)

$$\text{ஆதிலை } \left(\frac{F^2}{2BG} - \frac{C}{2G}, -\frac{F}{B} \right) \text{ புள்ளிக்குச் மாற்றி}$$

சமன்பாடு (7),

$$BY^2 = - \frac{1}{2} GX \text{ என்றும்.}$$

$$(அ - து) \quad Y^2 = - \frac{2G}{B} X.$$

இவ்வகையில் இஃது ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும்.

எனவே, எல்லா வகைகளிலும்

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ஒரு கூம்பு வெட்டியைக் குறிக்கும்.

9-3. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற கூம்பு வளைவின் மையம்

கூம்பு வளைவின் மையம் (x_1, y_1) எனக் கொள்ளலாம். ஆயில் களில் போக்கை மாற்றாமல் ஆதிலை (x_1, y_1) புள்ளிக்கு மாற்றினால்,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாடு

$$\begin{aligned} & a(x+x_1)^2 + 2h(x+x_1)(y+y_1) + b(y+y_1)^2 \\ & + 2g(x+x_1) + 2f(y+y_1) + c = 0 \text{ என்றும்.} \end{aligned}$$

இருபடிவின் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல் 891

$$(அ-அ) \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c + ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + gxx_1 + 2h(x_1y_1 + x_1y) + 2h^2y_1^2 = 0.$$

$$(அ-அ) \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2g(ax_1 + by_1 + g) + 2f(hx_1 + by_1 + f) + (ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) = 0 \quad \dots \quad (B)$$

மையம் ஆதாரத்தில், λ, γ கொண்டு உறுப்புக்களின் செலுக்கள் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad ax_1 + by_1 + g = 0$$

$$hx_1 + by_1 + f = 0.$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{hf - bg} = \frac{y_1}{gh - af} = \frac{1}{ab - h^2}.$$

$$(அ-அ) \quad x_1 = \frac{hf - bg}{ab - h^2}$$

$$y_1 = \frac{gh - af}{ab - h^2}.$$

எனவே, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற கூம்பு வளைவின் மையம்

$$\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2} \right)$$

$ab - h^2 = 0$ எனில், மையத்தில் ஆபத்தொலைகள் சுத்தத் திடுபுடையதாகும்.

(அ-அ) கூம்பு வளைவு ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு : $F(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ எனில், கூம்பு வளைவின் மையம்

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து திட்டக்கம் பெறும்.

9.4. ஆதிமைய மையமாகக் கொண்ட கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

கூம்பு வளைவின் மையம் (x_1, y_1) எனின்,

$$ax_1 + hy_1 + g = 0$$

$$hx_1 + by_1 + f = 0$$

ஆதிமைய (x_1, y_1) புள்ளிக்கு மாற்றச் சமன்பாடு (1),

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2x(ax_1 + hy_1 + g) + 2y(hx_1 + by_1 + f) + ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \text{ என்கிறோம்.}$$

$$\begin{aligned} \therefore ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \\ &= x_1(ax_1 + hy_1 + g) + y_1(hx_1 + by_1 + f) \\ &\quad + gx_1 + fy_1 + c \\ &= gx_1 + fy_1 + c \quad \left[\begin{array}{l} \because ax_1 + hy_1 + g = 0 \\ hx_1 + by_1 + f = 0 \end{array} \right] \\ &= g \left(\frac{hf - bg}{ab - h^2} \right) + f \left(\frac{gh - af}{ab - h^2} \right) + c \\ &= \frac{abg + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2}{ab - h^2} \\ &= \frac{\Delta}{ab - h^2} \quad [\Delta = abg + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2] \\ &= c_1. \end{aligned}$$

\therefore ஆதிமைய மையமாகக் கொண்ட கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c_1 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

இங்கு $c_1 = gx_1 + fy_1 + c$

$$= \frac{\Delta}{ab - h^2}.$$

$$\Delta = abg + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$$

இருபடியின் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல் 393

குறிப்பு 1 : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்குமெனின், $ax^2 + 2hxy + by^2 + \frac{\Delta}{ab-h^2} = 0$ ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும். எனவே, இச்சமன்பாடு சமபடித்தான சமன்பாடாக இருத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore \Delta = 0$$

$$(அ-து) \quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 \quad \text{ஆகும்.}$$

$\therefore ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டைக்கோடுகளைக் குறிக்கத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$$

குறிப்பு 2 : ஆதிவழி அமைவதாகக் கொண்ட கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c_1 = 0$$

இதை $-c_1$ ஆல் வகுப்பின்,

$$\frac{a}{-c_1}x^2 + \frac{2h}{-c_1}xy + \frac{b}{-c_1}y^2 = 1$$

$$(அ-து) \quad a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 1$$

என்ற வடிவஸம் பெறும்.

$$\text{இங்கு } a' = -\frac{a}{c_1}$$

$$h' = -\frac{h}{c_1}$$

$$b' = -\frac{b}{c_1} \quad \text{ஆகும்.}$$

$$9-5. \quad f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

எனும் இருபடிய் பொதுச் சமன்பாடு

$$(i) \quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 \quad \text{எனின், இரட்டைக் கோடுகளை}$$

$$(ii) \quad a = b, \quad h = 0 \quad \text{எனின், ஒரு வட்டத்தை}$$

(iii) $ab - b^2 = 0$ எனில், பரவளைவை

(iv) $ab - b^2 > 0$ எனில், நீள் வட்டத்தை

(v) $ab - b^2 < 0$ எனில், ஆதி பரவளைவை

(vi) $a + b = 0$ எனில், செய்வக ஆதி பரவளைவைக் குறிக்கும்.

மீண்டும், $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ கூம்பு வளைவின் மையம் $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும்.

மேலும், ஆதிவை மையத்திற்கு மாற்றினால், சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c_1 = 0 \quad (c_1 = gx_1 + fy_1 + c)$$

என்றாகும்.

எடுத்துக் 1 :

$$86x^2 + 24xy + 26y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$$

என்ற கூம்பு வளைவின் தனிமையாக காண்க.

$$86x^2 + 24xy + 26y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$$

$$a=86, 2h=24, b=26, 2g=-72, 2f=126, c=81.$$

$$ab-b^2=86.26-12^2=1044-144=900 > 0.$$

எனவே, கூம்பு வளைவு ஒரு நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$$f(x, y) = 86x^2 + 24xy + 26y^2 - 72x + 126y + 81.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 72x + 24y - 72$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 24x + 52y + 126.$$

கூம்பு வளைவின் மையம் $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்,

இருபடியின் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல் 395

$$\therefore 72x + 24y - 72 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$24x + 68y + 128 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$(1) - இலிருந்து \quad 24x + 6y - 24 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

(3) - இலிருந்து (2) னுக் கழிப்பின்

$$50y = -120,$$

$$\therefore y = -2.4,$$

$$24x = 24 - 6y = 24 + 24 = 48,$$

$$\therefore x = 2$$

எனவே, கூம்பு வளைவின் மையம் (2, -3).

ஆதியை (2, -3) புள்ளிக்கு மாற்றினால் சமன்பாடு

$$88x^2 + 24xy + 28y^2 + c_1 = 0 \quad \text{என்றால்,}$$

$$c_1 = gx_1 + fy_1 + c$$

$$= -88(2) + 68(-3) + 81$$

$$= -72 = 188 + 51$$

$$= -180.$$

எனவே, புது ஆயங்களைப் பொறுத்து நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$88x^2 + 24xy + 28y^2 = 180$$

$$(அ.அ) \quad \frac{88}{180} x^2 + \frac{24}{180} xy + \frac{28}{180} y^2 = 1.$$

மாடுக 2 : $x^2 + 24xy - 6y^2 + 28x + 88y + 18 = 0$ என்ற கூம்பு வளைவின் தனிமையை ஆராய்க.

$$f(x, y) = x^2 + 24xy - 6y^2 + 28x + 88y + 18.$$

$$a=1, \quad 2b=24, \quad b=6, \quad 2g=28, \quad 2f=88, \quad c=18.$$

$$\therefore \Delta = h^2 = 1(-6) - 12^2 = -6 - 144 \\ = -150 < 0.$$

எனவே, சமன்பாடு ஓர் ஆதிபரவரினாகக் குறிக்கும்.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 24y + 28$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 24x - 12y + 28$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ எனில்,}$$

$$2x + 24y + 28 = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad x + 12y + 14 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$24x - 12y + 28 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

(1)-ஐவும் (2) ஐவும் கூட்டினால்,

$$25x = -50$$

$$\therefore x = -2.$$

(1)-ஐம் $x = -2$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$-2 + 12y + 14 = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad 12y = -12$$

$$\therefore y = -1.$$

எனவே, ஆதிபரவரினின் மையம் $(-2, -1)$.

ஆதிமைய $(-2, -1)$ புள்ளிக்கு மாற்றினால் சமன்பாடு

$$x^2 + 24xy - 8y^2 + c_1 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

என்றாகும்.

$$c_1 = gx_1 + fy_1 + c$$

$$= 14(-2) + 18(-1) + 18$$

$$= -28 - 18 + 18$$

$$= -28.$$

எனவே, புது ஆயங்களைச் சேர்த்த அதிபு வளைவின் சமன்பாடு

$$x^2 + 24xy - 6y^2 = 80$$

$$(அ - அ) \frac{x^2}{80} + \frac{24}{80} xy - \frac{6}{80} y^2 = 1.$$

9-8. ஆதிமைய மையமாகக் கொண்ட கூம்பு வளைவின் அச்சக் கணித நிலையும், நீளங்களும்.

மையம் கூம்பு வளைவின் (central conic) சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1 \quad \dots \quad (1)$$

ஆதிமைய மையமாகக் கொண்ட, r அளவற்ற கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \dots \quad (2)$$

எனக் கொள்கோம்.

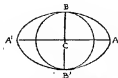
வளைவுகள் (1), (2) வெட்டுவ புள்ளிகளை மையத்துடன் சேர்க்கும் இரட்டைக்கோடுகளின் சேர்த்த சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = \frac{x^2 + y^2}{r} \quad \dots \quad (3)$$

ஆகும்.



படம் 88 (i)



படம் 88 (ii)

வட்ட ஆரம் அரை அச்சங்களில் யாதேனும் ஒன்றுக்குச் சம மெனின், சமன்பாடு (3) குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் பொருத்தும் கோடுகளாகும். இரட்டைக் கோடுகள் பொருத்தும் கோடுகளாவதற்குத் தக்க ஆரம் r -இன் மதிப்பைக் கொண்டால், கிடைக்கும் சமன்பாட்டிலிருந்து அச்சங்களின் நீளங்கள் அறியலாம்.

சமன்பாடு (8)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி அமைக்கலாம்:

$$\left(a - \frac{1}{r^2}\right)x^2 + 2kxy + \left(b - \frac{1}{r^2}\right)y^2 = 0 \quad (4)$$

சமன்பாடு (4) பொருத்தும் கோடுகளைக் குறிக்கத் தேவை வரன கட்டுப்பாடு

$$\left(a - \frac{1}{r^2}\right)\left(b - \frac{1}{r^2}\right) - k^2 = 0 \quad \dots \quad (5)$$

ஆகும்.

இது r^2 -இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின், r^2 -க்கு இரு மதிப்புகள் உண்டு. அவை r_1^2, r_2^2 எனக் கொள்வோம். r_1^2, r_2^2 தேர் மதிப்புக்கள் கொண்டிருப்பின், தீர் வட்டத்தின் ஆச்சுக்கள் கிடைக்கப் பெறும். $r_1^2 > r_2^2$ என்க.

பெச்சின் தீளம் $2r_1$

சிறுச்சின் தீளம் $2r_2$.

r_1^2, r_2^2 மதிப்புக்களிலொன்று தேர் எண்ணாகவும், மற்றொன்று குறை எண்ணாகவு மிருப்பின், அதிபரவரினவின் ஆச்சுக்கள் கிடைக்கப் பெறும். $r_1^2 > 0, r_2^2 < 0$ என்க.

குறுக்கச்சின் தீளம் $2r_1$

துணையச்சின் தீளம் $2\sqrt{|r_2^2|}$.

சமன்பாடுகள் (4), (5)-ஐ இணைப்பின்

$$\left(a - \frac{1}{r^2}\right)x^2 + 2kxy + \left(\frac{b^2}{a - \frac{1}{r^2}}\right)y^2 = 0$$

$$(அ-து) \quad \left(a - \frac{1}{r^2}\right)^2 x^2 + 2k\left(a - \frac{1}{r^2}\right)xy + b^2 y^2 = 0$$

$$(அ-அ) \quad \left[\left(a - \frac{1}{r^2}\right)x + by\right]^2 = 0.$$

எனவே, தீளம் $2r_1$ கொண்ட ஆச்சின் சமன்பாடு,

$$\left(a - \frac{1}{r_1^2}\right)x + by = 0,$$

இருபடிதின் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல் 399

நிளம் $2r_2$ கொண்ட, ஆச்சின் சமன்பாடு

$$\left(a - \frac{1}{r_2}\right)x + by = 0.$$

மாதிரி 3: $8x^2 + 12xy + 17y^2 + 4x - 22y - 7 = 0$ என்ற கூம்பு வளைவின் தன்மையை ஆராய்ந்து அதன் மையம், ஆச்சுக் கன் தம் நீளங்கள் சமன்பாடுகள் காண்க.

$$f(x, y) = 8x^2 + 12xy + 17y^2 + 4x - 22y - 7 = 0.$$

$$a = 8, 2b = 12, c = 17$$

$$2g = 4, 2f = -22, c = -7.$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad ab - h^2 &= 8 \cdot 17 - 6^2 \\ &= 136 - 36 \\ &= 100 > 0. \end{aligned}$$

எனவே, கூம்பு வளைவு ஒரு நீள் வட்டமாகும்.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 16x + 12y + 4.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12x + 34y - 22$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ எனில்,}$$

$$16x + 12y + 4 = 0$$

$$12x + 34y - 22 = 0.$$

இச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள், $x = -1, y = 1$

எனவே, நீள் வட்டத்தின் மையம் $(-1, 1)$.

ஆதிமை மையம் $(-1, 1)$ -க்கு மாற்றினால்,

$$8x^2 + 12xy + 17y^2 + c_1 = 0.$$

$$c_1 = gx_1 + fy_1 + c$$

$$= 2(-1) + (-11)1 + (-7)$$

$$= -2 - 11 - 7 = -20.$$

எனவே, மையக் கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

(அ-து) புது ஆயங்களைச் சேர்த்த நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$8x^2 + 12xy + 17y^2 = 20$$

$$(அ-து) \quad \frac{8}{20}x^2 + \frac{12}{20}xy + \frac{17}{20}y^2 = 1,$$

அச்சக்களின் நீளங்கள்

$$\left(A - \frac{1}{r^2}\right) \left(B - \frac{1}{r^2}\right) = 4^2$$

என்ற சமன்பாட்டிற்குத்து கிடைக்கப்பெறும்.

$$(அ-து) \quad \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}(A+B) + (AB-4^2) = 0,$$

$$\therefore \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\right) \left(\frac{8}{20} + \frac{17}{20}\right) + \left(\frac{8}{20} \cdot \frac{17}{20} - \frac{6^2}{20^2}\right) = 0$$

$$(அ-து) \quad 400 - 500r^2 + 100r^4 = 0$$

$$\therefore r^4 - 5r^2 + 4 = 0$$

$$(அ-து) \quad (r^2 - 4)(r^2 - 1) = 0$$

எனவே, $r = \pm 2$, $r = \pm 1$.

\therefore பேரச்சின் நீளம் $2r_1 = 2.2 = 4$.

சிறுச்சின் நீளம் $2r_2 = 2.1 = 2$.

பேரச்சின் சமன்பாடு

$$\left(A - \frac{1}{r_1^2}\right)x + 4y = 0$$

$$(அ-து) \quad \left(\frac{8}{20} - \frac{1}{4}\right)x + \frac{8}{20}y = 0,$$

$$(அ-து) \quad 8x + 8y = 0,$$

$$\therefore x + y = 0.$$

இருபடியின் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல் 401

எனவே, பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்துப் பேரத்தில் சமன்பாடு

$$(x+1) + 2(y-1) = 0$$

$$(அ-ஆ) \quad x + 2y - 1 = 0.$$

சித்தர்சு. பேரத்திற்குச் செங்குத்தாயிருப்பதால், அதன் சமன்பாடு

$$2x - y = K \text{ வடிவில் இருக்கும்.}$$

இது ஊயம் $(-1, 1)$ புள்ளி வழிச் செல்லுவதால்

$$-2 - 1 = K.$$

$$\therefore K = -3.$$

எனவே, சித்தர்சின் சமன்பாடு

$$2x - y + 3 = 0.$$

மாநி 4: $8x^2 - 24xy + 15y^2 + 48x - 48y = 0$ என்ற கூம்பு வளைவின் தன்மையை ஆராய்ந்து, அதன் மையமும், அச்சக்கவிர்தம் சமன்பாடுகளும், நீளங்களும் காண்க.

$$F(x, y) = 8x^2 - 24xy + 15y^2 + 48x - 48y.$$

$$a = 8, \quad h = -12, \quad b = 15,$$

$$g = 24, \quad f = -24.$$

$$\Delta = -h^2 = 8.15 - 144 = -24 < 0.$$

எனவே, கூம்பு வளைவு ஓர் அநிபரவளைவைக் குறிக்கும்.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 16x - 24y + 48$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -24x + 30y - 48.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ எனின்,}$$

$$16x - 24y + 48 = 0$$

$$-24x + 30y - 48 = 0.$$

$$\text{ம. ம.} = 26$$

இச் சமன்பாடுகளில் தீர்வுகள் $x = 8$, $y = 4$.

எனவே, அதிபரவரிசை எமயம் $(8, 4)$.

ஆதிவடிவ எமயத்திற்கு மாற்றினும், எமயக் கூம்பு வரிசையின் சமன்பாடு (அ-ஆ) அதி ஆயங்களைச் சேர்த்து அதிபரவரிசையின் சமன்பாடு

$$8x^2 - 24xy + 16y^2 + c_1 = 0$$

$$c_1 = 8x_1 + fy_1 + c$$

$$= 24.8 + (-24) 4$$

$$= 72 - 96 = -24.$$

$$\therefore \text{சமன்பாடு } 8x^2 - 24xy + 16y^2 = 24$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad \frac{8}{24}x^2 - \frac{24}{24}xy + \frac{16}{24}y^2 = 1.$$

அச்சக்களின் தீர்வு

$$\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^3}(A + B) + (AB - 4^2) = 0.$$

$$\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^3}\left(\frac{8}{24} + \frac{16}{24}\right) + \left(\frac{8.16}{24^2} - \frac{12^2}{24^2}\right) = 0$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad \frac{1}{r^4} - \frac{28}{24} \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{1}{24} = 0$$

$$(\text{அ} - \text{ஆ}) \quad 24 - 28r^2 - r^4 = 0.$$

$$\therefore \quad r^4 + 28r^2 - 24 = 0.$$

$$\therefore \quad (r^2 - 1)(r^2 + 24) = 0.$$

$$\text{எனவே, } r^2 = \pm 1, \quad r^2 = \pm \sqrt{-24}.$$

$$\text{எனவே, குறுக்கச்சின் தீர்வு } 2r_1 = 2.1 = 2.$$

$$\text{துணையச்சின் தீர்வு } 2r_2 = 2.2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}.$$

குறுக்கச்சின் சமன்பாடு

$$\left(A - \frac{1}{r_1^2}\right)x + 4y = 0$$

$$(அது) \left(\frac{8}{24} - \frac{1}{1} \right) x - \frac{18}{24} y = 0.$$

$$\therefore 4x + 8y = 0.$$

பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்துக் குறுக்கச்சின்
சமன்பாடு, $4(x-8) + 8(y-4) = 0$

$$(அது) 4x + 8y - 84 = 0.$$

துணைபச்சின் சமன்பாடு

$$3x - 4y = K \text{ லை விரிவாகவும்.}$$

இது (8, 4) புள்ளி வழிச் செல்வின்

$$3 \cdot 8 - 4 \cdot 4 = K.$$

$$\therefore K = -7.$$

எனவே, பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்துச் துணைபச்சின்
சமன்பாடு $3x - 4y + 7 = 0$.

9-7. $ax^2 + 2bxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற பா
வணவின் மூலங்களும் ஆச்சும் காணுதல்

$$ax^2 + 2bxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \therefore \quad (1)$$

சமன்பாடு (1) பரவளைவைக் குறிக்கு மெனின்,

$$h^2 - ab = 0.$$

எனவே, இருபடித்தின்ன உறுப்புகள் முழு வர்க்கமாகும்.

$$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2 \text{ எனக் கொண்டால்,}$$

சமன்பாடு (1)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$(அ - து) \quad (\alpha x + \beta y + \lambda)^2 = 2x(\alpha\lambda - g) + 2y(\beta\lambda - f) + \lambda^2 - c \dots \dots (2)$$

பரவளைவில் செய்வகல நீளம் K எனக் கொள்வோம். இங், பரவளைவின் மீதுள்ள ஊதேனும் ஒரு புள்ளிக்குப் பரவளைவின் அச்சிலிருந்து உள்ள தூரம், அப் புள்ளிக்குப் பரவளைவின் மூலையிலிருந்து தொடுகோட்டிலிருந்து உள்ள தூரத்தின் K மடங்கு என தாம் அறிவோம். மேலும் அச்சம், மூலையிலிருந்து தொடுகோட்டும் தம்முள் செங்குத்தாதவின்,

$$\alpha x + \beta y + \lambda = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$2x(\alpha\lambda - g) + 2y(\beta\lambda - f) + \lambda^2 - c = 0 \quad \dots \quad (4)$$

கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாயிருக்கத் தக்கவாறு λ -வின் மதிப்பைக் கொள்வோம்.

$$\text{கோடு (3)-ஐச் சரிவு} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

$$\text{கோடு (4)-ஐச் சரிவு} = -\left(\frac{\lambda\alpha - g}{\lambda\beta - f}\right).$$

$$\therefore \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(-\frac{\lambda\alpha - g}{\lambda\beta - f}\right) = -1$$

$$(\text{அ} - \text{க}) \quad \alpha(\lambda\alpha - g) + \beta(\lambda\beta - f) = 0.$$

$$\therefore \quad \lambda(\alpha^2 + \beta^2) = g\alpha + f\beta.$$

$$\text{எனவே,} \quad \lambda = \frac{g\alpha + f\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

\therefore சமன்பாடு (3)-ஐக் கீழ்க் கண்டவாறு மாற்றி எழுதினால்

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\alpha x + \beta y + \lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right]^2 (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^2 \\ &= 2 \left\{ \frac{x(\alpha\lambda - g) + y(\beta\lambda - f) + \frac{1}{2}(\lambda^2 - c)}{\sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\beta\lambda - f)^2}} \right\} \\ & \quad \times \sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\beta\lambda - f)^2} \end{aligned}$$

$$(அ-அ) \left[\frac{\alpha x + \beta y + \lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right]^2 = \frac{2\sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\beta\lambda - f)^2}}{\alpha^2 + \beta^2} \\ \times \left\{ \frac{\pi(\alpha\lambda - g) + \gamma(\beta\lambda - f) + \frac{1}{2}(\lambda^2 - c)}{\sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\beta\lambda - f)^2}} \right\}.$$

ஆச்சின் சமன்பாடு $\alpha x + \beta y + \lambda = 0$.

முடிவகிடத்துத் தொடுகோடு

$$(\alpha\lambda - g)x + (\beta\lambda - f)y + \frac{1}{2}(\lambda^2 - c) = 0.$$

செய்வகல தீர்மானம் $\frac{2\sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\beta\lambda - f)^2}}{\alpha^2 + \beta^2}$ என்றாகும்.

$$\text{இங்கு } \lambda = \frac{g\alpha + f\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

9-8. கூம்பு வளைவின் அமைபத் தொலை விசிறம்

தீர் வட்டத்தின் அமைபத் தொலை விசிறம் e , $b^2 = a^2(1 - e^2)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருத்தும், அதி பரவளைவின் அமைப்தொலை விசிறம் $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருத்தும் கிடைக்கப் பெறும்.

\therefore தீர் வட்டத்தின் அமைபத் தொலை விசிறம்

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2}.$$

அதி பரவளைவின் அமைபத் தொலை விசிறம்

$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2}.$$

9-9. குவியங்களின் ஆயத் தொலைகள்

ஒரு கூம்பு வளைவின் குவியங்கள் அங் வளைவு மேர்த்து (அ-அ) குறுக்கச்சின்மீது அதன் அமைப்திலிருத்து ac தூரத்தில் இரு பக்கங் களிலும் உள்ளது. இங் வர்க் x ஆயத்துடன் சம்பத்துள்ள கோணம் θ எனவும், கூம்பு வளைவின் அமைபம் (x_1, y_1) எனவும்

கொண்டால் இவ்விலக்கின் ஆயத் தொலைகள் $(x_1 + er_1 \cos \theta, y_1 + er_1 \sin \theta)$, $(x_1 - er_1 \cos \theta, y_1 - er_1 \sin \theta)$ ஆகும். இங்கு r_1 பெரக்க (அ-து) குறுக்கத்தில் தீரத்தில் பாதிவாரும்.

மாதிரி 5: $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$ என்ற கூம்பு வளைவின் தன்மையை ஆராய்ந்து வரைக.

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0 \quad \dots (1)$$

$$a = 4, b = -2, c = 1$$

$$g = -4, f = -3, c = 5.$$

$$ab - b^2 = 4.1 - 4 = 0.$$

எனவே, கூம்பு வளைவு ஒரு பரவளைவு ஆகும்.

சமன்பாடு (1)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 6y - 5$$

$$(2x - y)^2 = 8x + 6y - 5$$

$$\begin{aligned} (2x - y + \lambda)^2 &= 8x + 6y - 5 + 4\lambda x - 2\lambda y + \lambda^2 \\ &= x(8 + 4\lambda) + y(6 - 2\lambda) \\ &\quad + (\lambda^2 - 5) \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$$2x - y + \lambda = 0$$

$$(8 + 4\lambda)x + (6 - 2\lambda)y + (\lambda^2 - 5) = 0$$

கோடுகள் தம்மிக் செங்குத்தெனின்,

$$8(8 + 4\lambda) - 1(6 - 2\lambda) = 0$$

$$(அ - து) \quad 10\lambda + 10 = 0,$$

$$\therefore \lambda = -1.$$

இம் மதிப்பைச் சமன்பாடு (2)-இல் பிரதியிடின்,

$$(2x - y - 1)^2 = 4(x + 2y - 1)$$

$$(அ - து) \quad \left(\frac{2x - y - 1}{\sqrt{5}} \right)^2 = 4 \left(\frac{x + 2y - 1}{\sqrt{5}} \right) \sqrt{5}.$$

$$\therefore \left(\frac{2x - y - 1}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{4}{\sqrt{5}} \left(\frac{x + 2y - 1}{\sqrt{5}} \right)$$

அ - நு) $Y^2 = 4aX$.

$$\therefore 4a = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \therefore a = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

எனவே, செங்கவலத்தின் நீளம் $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

பரவளைவின் அச்ச $Y = 0$

(அ - நு) $2x - y - 1 = 0$.

முனைவிடத்துத் தொடுகோடு $X = 0$

(அ - நு) $x + 2y - 1 = 0$.

பரவளைவின் முனை ($X = 0, Y = 0$)

(அ - நு) $x + 2y - 1 = 0, 2x - y - 1 = 0$.

எனவே மூளை $\left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5} \right)$.

சமன்பாடு (1)-இல் $y=0$ எனப் பிரதியிடுக, அது $4x^2 - 8x + 5 = 0$ என்கிறும். இதன் மூலங்கள் கற்பனைவாதலின் பரவளைவு x ஆயத்தை மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டாது.

சமன்பாடு (1)-இல் $x=0$ எனப் பிரதியிடுக, அது $y^2 - 6y + 5 = 0$ என்கிறும்.

(அ - நு) $(y-1)(y-5) = 0$.

எனவே, பரவளைவு y ஆயத்தை $Q(0, 1), Q'(0, 5)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

பரவளைவின் படம் வரைவ முறையில் அதன் அச்சையும், முனைவிடத்துத் தொடுகோடும் காரைவகை, இவைகள் வெட்டும் புள்ளி பரவளைவின் முனைவாகும். பரவளைவு x ஆயத்தை வெட்டாது. அது y ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளிகளான $Q(0, 1),$

இருபடிமிக் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல் 409

மேல்த் 6 : $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0$
என்ற கூம்பு வளைவை ஆராய்ந்து படம் வரைக.

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0 \dots (1)$$

$$a = 16, b = -12, c = 9$$

$$g = -52, f = -86, c = 44.$$

$$ab - h^2 = 16 \cdot 9 - 144 = 0.$$

எனவே, சமன்பாடு (1) ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும்.

சமன்பாடு (1)-ஐப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 = 104x + 172y - 44$$

$$(4x - 3y)^2 = 104x + 172y - 44$$

$$\begin{aligned} (4x - 3y + \lambda)^2 &= 104x + 172y - 44 + 8\lambda x - 6\lambda y + \lambda^2 \\ &= x(104 + 8\lambda) + y(172 - 6\lambda) \\ &\quad + (\lambda^2 - 44) \dots (2) \end{aligned}$$

$$4x - 3y + \lambda = 0$$

$$x(104 + 8\lambda) + y(172 - 6\lambda) + (\lambda^2 - 44) = 0$$

கோடுகள் தம்மொன்றைச் செங்குத்தெதலின்,

$$4(104 + 8\lambda) - 3(172 - 6\lambda) = 0$$

$$(\text{அ.து}) \quad 416 + 32\lambda - 516 + 18\lambda = 0.$$

$$\therefore 50\lambda = 100.$$

$$\therefore \lambda = 2.$$

இப்பதிர்வைச் சமன்பாடு (2)-ஐப் பிரதிபிடிக்க,

$$(4x - 3y + 2)^2 = 120x + 160y - 40$$

$$= 40(3x + 4y - 1).$$

$$\therefore \left(\frac{4x - 3y + 2}{5}\right)^2 = 40 \left(\frac{3x + 4y - 1}{5}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{4x-8y+2}{6} \right)^2 = 8 \left(\frac{8x+4y-1}{6} \right)$$

$$(அ-து) \quad Y^2 = 40X.$$

$$\therefore \quad a = 2.$$

எனவே, செங்குத்துத்தின் நீளம் 4.2-8.

பரவளைவின் ஆச்சு $Y = 0$

$$(அ - து) \quad 4x - 8y + 2 = 0.$$

முனைவிடத்துத் தொடுகோடு $X = 0$

$$(அ - து) \quad 8x + 4y - 1 = 0.$$

பரவளைவின் மூளை ($X = 0, Y = 0$)

$$(அ - து) \quad [8x + 4y - 1 = 0, 4x - 8y + 2 = 0]$$

$$(அ - து) \quad \left(-\frac{1}{8}, \frac{2}{8} \right).$$

சமன்பாடு (1)-இல், $y = 0$ எனப் பிரதியிடுக.

$$16x^2 - 104x + 44 = 0$$

$$(அ - து) \quad 4x^2 - 26x + 11 = 0.$$

$$\therefore \quad x = 8.1$$

$$x = .5 \text{ (தேராயமாக).}$$

எனவே, பரவளைவு x ஆயத்தை $P(.5, 0), P'(8.1, 0)$ புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

சமன்பாடு (1)-இல், $x = 0$ எனப் பிரதியிடுக.

$$9y^2 - 172y + 44 = 0.$$

$$\therefore \quad y = 0.8$$

$$y = 19 \text{ (தேராயமாக).}$$

இருபடியின் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல் 411

எனவே, பரவளைவு y ஆயத்தை $Q(0, 0.8)$, $Q'(0, 1.8)$ புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

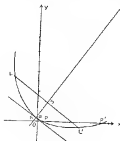
பரவளைவுப் படம் வரைய, முதலில் பரவளைவின் அச்சையும், முனைவிடத்துத் தொடுகோடும் வரைக. இவைகள் வெட்டும் புள்ளி A , பரவளைவின் முனையாகும்.

பரவளைவு x ஆயத்தை $P(0.5, 0)$, $P'(8.5, 0)$ புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. எனவே, x ஆயத்தின் மீது P, P' புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். பரவளைவு y ஆயத்தை $Q(0, 0.8)$, $Q'(0, 1.8)$ புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. எனவே, y ஆயத்தின் மீது Q, Q' புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

பரவளைவின் முனை A -யிலிருந்து அதன் அச்சின் மீது S புள்ளியை $AS = 2$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் குறிக்கவும். S புள்ளியிலிருந்து பரவளைவின் அச்சுக்குச் செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைந்து அதன் மீது L, L' புள்ளிகளை $SL = SL' = 4$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும்.

S பரவளைவின் குவியம் L, L' புள்ளிகள் செவ்வகத்தின் மூல்களாகும்.

பரவளைவு A, P, Q, P', Q', L, L' புள்ளிகள் வழிச் செல்லும். படம் தோராயமாகப் பின் வருமாறு இருக்கும்.



படம் 80

பரவளைவு

$$A \left[-\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right], P(6, 0), P'(8.1, 0),$$

$$Q(0, 0.8), Q'(0, 1.0), AS = 2; SL = SL' = 4.$$

மாதிரி 7: $36x^2 + 24xy + 20y^2 - 72x + 120y + 81 = 0$
என்ற கூம்பு வளைவீனை ஆராய்ந்து படம் வரைக.

$$F(x, y) = 36x^2 + 24xy + 20y^2 - 72x + 120y + 81 = 0(1).$$

$$a=36, \quad h=12, \quad b=20, \quad g=-36, \quad f=60, \quad c=81.$$

$$ab-h^2 = 36.20 - 12^2$$

$$= 1044 - 144$$

$$= 900 > 0.$$

எனவே, சமன்பாடு (1) ஒரு நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 72x + 24y - 72$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 24x + 56y + 120.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ எனின்,}$$

$$72x + 24y - 72 = 0$$

$$24x + 56y + 120 = 0.$$

இச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் நீள் வட்டத்தின் அளையாகும்.

∴ நீள் வட்டத்தின் அளையம் $(2, -3)$.

ஆதிமைய அளவீட்டிற்கு மாற்றினால் சமன்பாடு (1)

$$36x^2 + 24xy + 20y^2 + c_1 = 0 \text{ என்கிறும்.}$$

$$c_1 = gx_1 + fy_1 + c$$

$$= (-36).2 + 60(-3) + 81$$

$$= -72 - 180 + 81 = -180.$$

இருபடிசின் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல் 418

எனவே, எழலக் கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு (அ-து) டுதிய ஆயங்களிற் பொதுத்த நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$86x^2 + 24xy + 28y^2 = 180$$

$$(அ-து) \frac{86}{180}x^2 + \frac{24}{180}xy + \frac{28}{180}y^2 = 1 \quad \dots (2)$$

பேரச்சு, சிற்றச்சு ஆகியவையாலின் நீளங்கள் பின்வரும் சமன்பாட்டின்படி கிடைக்கப்பெறுக.

$$\left(A - \frac{1}{r^2}\right) \left(B - \frac{1}{r^2}\right) = H^2,$$

$$\text{இங்கு } A = \frac{86}{180}, B = \frac{28}{180}, H = \frac{12}{180}.$$

$$\therefore \left(\frac{86}{180} - \frac{1}{r^2}\right) \left(\frac{28}{180} - \frac{1}{r^2}\right) = \left(\frac{12}{180}\right)^2$$

$$(அ-து) (86r^2 - 180)(28r^2 - 180) = 144r^4$$

$$\therefore 1044r^4 - 11700r^2 + 82400 = 144r^4$$

$$(அ-து) 900r^4 - 11700r^2 + 82400 = 0$$

$$\therefore r^4 - 13r^2 + 86 = 0$$

$$\text{எனவே, } (r^2 - 8)(r^2 - 4) = 0$$

$$\therefore r_1^2 = 8; r_2^2 = 4$$

$$\text{பேரச்சின் நீளம் } 2r_1 = 2\sqrt{8} = 6.$$

$$\text{சிற்றச்சின் நீளம் } 2r_2 = 2\sqrt{4} = 4.$$

பேரச்சின் சமன்பாடு,

$$\left(A - \frac{1}{r_1^2}\right)x + Hy = 0$$

$$(அ-து) \left(\frac{86}{180} - \frac{1}{8}\right)x + \frac{12}{180}y = 0.$$

$$\therefore 16x + 12y = 0.$$

புறவடிவ ஆயக்களைச் சாத்திய பேரத்தில் சமன்பாடு

$$19(x-2) + 12(y+3) = 0.$$

$$16x + 12y + 4 = 0$$

$$(\text{ஆ-து, } 4x + 3y + 1 = 0.$$

சிற்றத்தில் சமன்பாடு $8x - 4y + K = 0$ ஆகும்.

இது $(2, -5)$ வழிச் செல்லும்.

$$8 + 12 + K = 0.$$

$$\therefore K = -16.$$

எனவே, புறவடிவ ஆயக்களைச் சாத்திய சிற்றத்தில் சமன்பாடு

$$8x - 4y - 16 = 0.$$

சமன்பாடு (1)-இல் $y = 0$ எனப் பிரதியிடுவர்.

$$86x^2 - 72x + 81 = 0$$

$$4x^2 - 8x + 9 = 0.$$

$$\therefore x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 144}}{8}.$$

எனவே, தன் வட்டம் x ஆயத்தைக் கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டும்.

சமன்பாடு (1)-இல் $x = 0$ எனப் பிரதியிடுவர்.

$$20y^2 + 12y + 81 = 0.$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} y = -\frac{3}{4} \\ y = -\frac{9}{4} \end{array} \right\} \text{(தேர்ச்சியாக)}$$

எனவே, தன் வட்டம் y ஆயத்தை $Q(0, -3)$, $Q'(0, -\frac{9}{4})$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

தன் வட்டத்தின் செங்குத்து

$$2 \frac{r_2^2}{r_1^2} = 2 \cdot \frac{4}{8} = \frac{8}{8}.$$

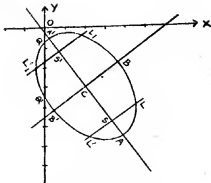
தன் வட்டம் வளைய மூலத்தில் பேரக்காலும், சிற்றக்காலும் வளைய ஆளாகக் வெட்டும் புள்ளி தன் வட்டத்தின் மையமாகும். மையம் C -யிலிருந்து பேரத்தில் மீது A, A' புள்ளிகளை $CA = CA' = 8$

என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும். இவைகளைப் பேரச்சின் முனைகளாகும். கீழ் சிற்றச்சில் B, B' புள்ளிகளை $CB = CB' = 2$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும்.

கீழ், S புள்ளியை வரையலாம். CA -வை ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையவும். இது பேரச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் S, S' எனும் குளியங்களாகும். S புள்ளி வழி பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைந்து அதன் மீது $SL = SL' = \frac{4}{3}$ என்றிருக்குமாறு L, L' புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இவ்வாறே S' வழி பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாகக் கோடு வரைந்து $S'L_1 = S'L'_1 = \frac{4}{3}$ என்றிருக்குமாறு L_1, L'_1 புள்ளிகளை குறிக்கவும்.

நீள் வட்டம் x ஆயத்தை வெட்டாது. அது y ஆயத்தை $Q(0, -3), Q'(0, 3)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

$A, A'; B, B'; L, L'; L_1, L'_1; Q, Q'$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வளைவு நீள் வட்டமாகும். அதன் அமைப்புத் தோராயமாகப் கீழ் வருமாறு இருக்கும்.



படம் 81. நீள் வட்டம்

$$c(2, -3), SL = \frac{4}{8}, SL_2 = \frac{4}{8}, Q(0, -3), Q'(0, 3-8).$$

மாதிரி 8 :

$$8(8x-2y+4)^2 + 2(2x+3y-5)^2 = 88$$

என்ற கூம்பு வளைவின் மட்டம் வரைக.

$$8(8x-2y+4)^2 + 2(2x+3y-5)^2 = 88 \quad \dots (1)$$

$$8x-2y+4 = 0, 2x+3y-5 = 0$$

என்ற கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டுகாதவின், சமன் பாடு (1)-ஐப் பின் வகுமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{aligned} & 8 \left[\frac{8x-2y+4}{\sqrt{8^2+2^2}} \right]^2 (\sqrt{8^2+2^2})^2 \\ & + 2 \left[\frac{2x+3y-5}{\sqrt{2^2+3^2}} \right]^2 (\sqrt{2^2+3^2})^2 = 88 \\ (அ-ஆ) & 8 \left(\frac{8x-2y+4}{\sqrt{18}} \right)^2 + 2 \left(\frac{2x+3y-5}{\sqrt{13}} \right)^2 = 8 \\ & \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$P(x, y)$ கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனவும், ஆப் புள்ளியிலிருந்து $8x-2y+4=0$, $2x+3y-5=0$ கோடுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் முறையே PM , PN எனவும் கொள்வோம்.

எனவே, சமன்பாடு (2)

$$8PM^2 + 2PN^2 = 8 \text{ என்கும்.}$$

$$(அ-ஆ) \quad \frac{PM^2}{1} + \frac{PN^2}{\frac{8}{2}} = 1$$

$$(அ-ஆ) \quad \frac{PN^2}{\frac{8}{2}} + \frac{PM^2}{1} = 1$$

$$(அ-ஆ) \quad \frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$$

என்ற வடிவிலுள்ளதால் சமன்பாடு (1) ஒரு நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

பேரச்சின் சமன்பாடு $Y = 0$

$$(அ-ஆ) \quad 8x - 2y + 4 = 0.$$

சிறுச்சின் சமன்பாடு $X = 0$

$$(அ-ஆ) \quad 2x + 3y - 5 = 0.$$

பேரச்சின் நீளம்

$$= 2A = 2\sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{8}.$$

சிறுச்சின் நீளம்

$$= 2B = 2\sqrt{1} = 2.$$

நீள் வட்ட மையம்

$$\left(\begin{array}{l} 8x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{array} \right) (அ-ஆ) \quad \left(-\frac{2}{18}, \frac{28}{18} \right).$$

நீள் வட்டத்தின் செங்குவகை

$$= 2 \frac{B^2}{A} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{2}}} = 2\sqrt{\frac{2}{8}}.$$

சமன்பாடு (1)-இல் $y = 0$ எனப் பிரதியிடுக.

$$8(8x + 4)^2 + 2(2x - 5)^2 = 99 \text{ என்றும்.}$$

$$8(2x^2 + 24x + 16) + 2(4x^2 - 20x + 25) = 99$$

$$(அ-ஆ) \quad 88x^2 + 82x + 59 = 0.$$

$$\therefore x = \frac{-82 \pm \sqrt{1024 - 5980}}{70}.$$

ப. வ.—27.

எனவே, நீள் வட்டம் x ஆயத்தை மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டாது.

மீண்டும் சமன்பாடு (1)-இல் $x = 0$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$3(-2y + 4)^2 + 2(2y - 5)^2 = 89$$

$$(அ - து) \quad (12y^2 - 48y + 48) + 2(2y^2 - 20y + 25) = 89$$

$$(அ - து) \quad 80y^2 - 108y + 59 = 0.$$

$$\therefore y = \frac{108 \pm \sqrt{11854 - 7050}}{80}.$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} y = 2.90 \\ y = .70 \end{array} \right\} \text{தேர்மானங்கள்.}$$

எனவே, நீள் வட்டம் y ஆயத்தை $Q(0, .7)$, $Q'(0, 2.9)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

நீள் வட்டம் வரைய முதுவில் $3x - 2y + 4 = 0$, என்ற பேரச்சையும், $2x + 3y - 5 = 0$ என்ற சிற்றச்சையும் வரையவும். இவைகள் வெட்டும் புள்ளி நீள் வட்ட மையம் $C\left(-\frac{2}{13}, \frac{28}{13}\right)$ ஆகும். இம் பேரச்சின்மீது A, A' புள்ளிகளை $CA = CA' = \sqrt{\frac{2}{3}}$ என்றிருக்குமாறும், சிற்றச்சின்மீது B, B' புள்ளிகளை $CB = CB' = 1$ என்றிருக்குமாறும் குறிக்கவும். இம் B புள்ளியை மையமாகவும், CA -வை ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக. இவ் வட்டம் பேரச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் S, S' எனும் குறியீடுகள் ஆகும்.

S, S' புள்ளிகள் வழி பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாகக் கோடுகள் வரைந்து $L, L'; L_1, L_1'$ என்ற புள்ளிகளை $SL = SL' = S'L = S'L' = \sqrt{\frac{2}{3}}$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும்.

$A, A'; B, B'; Q, Q'; L, L'; L_1, L_1'$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வளைவு நீள் வட்டமாகும். படத்தின் அமைப்பைத் தேர்மானமாகப் பின்வருமாறு இடுக்கும்.

எனவே, (1) ஓர் அதிபரவரினவைக் குறிக்கும்.

$$f(x, y) = 3x^2 + 4xy - 6.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ எனின்,}$$

$$6x + 4y = 0$$

$$4x = 0$$

எனவே, அதிபரவரினவிக் மையம் (0, 0).

ஆதியும் மையமும் ஒன்றாதலால், மையக் கூம்பு வரினவின் சமன்பாடு

$$3x^2 + 4xy - 6 = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{3}{6}x^2 + \frac{4}{6}xy = 1.$$

அச்சக்களின் தீர்வு

$$\left(A - \frac{1}{r^2}\right) \left(B - \frac{1}{r^2}\right) = H^2.$$

இங்கு $A = \frac{3}{6}$, $H = \frac{2}{6}$, $B = 0$ ஆதலால்,

$$\left(\frac{3}{6} - \frac{1}{r^2}\right) \left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{4}{36}.$$

$$(\text{அ-து}) \quad 2r^4 + 9r^2 - 18 = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad (2r^2 - 3)(r^2 + 6) = 0.$$

எனவே, $r_1^2 = \frac{3}{2}$, $r_2^2 = -6$.

இருபடியில் பொதுச் சமன்பாடு, ஆய்வு வளைவு வரைதல் 421

$$\therefore \text{குறுக்கச்சின் நீளம்} = 2\sqrt{r_1^2} = 2\sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{8}.$$

$$\text{துணையச்சின் நீளம்} = 2\sqrt{|r_3^2|} = 2\sqrt{|-8|} = 2\sqrt{8} \quad (\text{எண் மதிப்பு}).$$

குறுக்கச்சின் சமன்பாடு

$$\left(A - \frac{1}{r_1^2}\right)x + By = 0$$

$$(\text{அ} - \text{அ}) \quad \left(\frac{8}{8} - \frac{8}{8}\right)x + \frac{8}{8}y = 0$$

$$(\text{அ} - \text{அ}) \quad x - 8y = 0.$$

துணையச்சின் சமன்பாடு

$$2x + y = K.$$

இஃது ஆதி வளிச் செல்லாதால், $K = 0$.

$$\therefore 2x + y = 0.$$

சமன்பாடு (1)-இல், $y = 0$ எனப் பிரதியிடின்,

$$8x^2 = 8 \quad (\text{அ} - \text{அ}) \quad x = \pm \sqrt{2}.$$

எனவே, அநீயரவளைவு x ஆயத்தை $P(\sqrt{2}, 0)$, $P'(-\sqrt{2}, 0)$ புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

சமன்பாடு (2)-இல், $x = 0$ எனப் பிரதியிடின்,

$$y = \frac{8 - 8x^2}{4x} = \frac{8}{0} = \infty.$$

எனவே, அநீயரவளைவு y ஆயத்தைக் கத்தரிநிலில் வெட்டும்.

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{r_1^2 + |r_3^2|}{r_1^2} = \frac{\frac{8}{2} + 8}{\frac{8}{2}} \\ &= \frac{15}{2} \times \frac{2}{8} = 5. \end{aligned}$$

$$\therefore e = \sqrt{8}.$$

$$CS = CS' = r_1 e = \sqrt{\frac{8}{2}} \sqrt{8} = \sqrt{\frac{16}{2}}.$$

அதிபரவளைவின் செங்குத்து

$$= 2 \frac{1r_1^2}{r_1} = 2 \frac{8}{\sqrt{\frac{8}{2}}} = 4\sqrt{8}.$$

அதிபர வளைவு படம் வரைய முறையில் குறுக்கச்சையும் துணைபாச்சையும் வரையவும். இவைகள் வெட்டும் புள்ளி அதிபர வளைவின் மையம் $C(0, 0)$ ஆகும்.

குறுக்கச்சின்மீது A, A' புள்ளிகளை $CA = CA' = \sqrt{\frac{8}{2}}$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும். மேலும், குறுக்கச்சின்மீது S, S' புள்ளிகளை $CS = CS' = \sqrt{\frac{16}{2}}$ என்ற அளவில் குறிக்கவும்.

மீள் S, S' புள்ளிகள் வழி குறுக்கச்சுக்கு செங்குத்தாகக் கோடுகள் வரைத்து அவைகளின்மீது $L, L'; L_1, L_1'$ புள்ளிகளை $SL = SL' = S'L_1 = S'L_1' = 2\sqrt{8}$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும்.

$A, A'; P, P'; L, L'; L_1, L_1'$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வளைவு அதிபரவளைவாகும். அதிபரவளைவின் படம் தோராயமாகப் பின் வருமாறு அமையும்.

தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$$8x^2 + 4xy + K = 0.$$

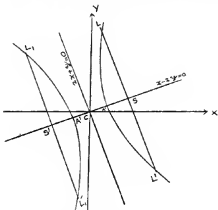
இவைகள் ஆதிவழிச் செல்வதால், $K = 0$.

எனவே, தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$8x^2 + 4xy = 0$$

$$(அ - து) \quad x(8x + 4y) = 0$$

$$(அ - து) \quad x = 0, 8x + 4y = 0.$$



படம் 98.

எடுத்து 10 : $x^2 - 6xy + y^2 + 8x - 20y + 16 = 0$ என்ற கூம்பு வளைவின் மையம் வரைக.

$$x^2 - 6xy + y^2 + 8x - 20y + 16 = 0 \quad \dots (1)$$

$$a = 1, \quad h = -\frac{3}{2}, \quad b = 1,$$

$$g = 4, \quad f = -10, \quad c = 16,$$

$$ab - h^2 = 1 - \frac{9}{4}$$

$$= -\frac{5}{4} < 0,$$

எனவே, சமன்பாடு (1) ஓர் அதிபரவளைவைக் குறிக்கும்.

$$f(x, y) = x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 5y + 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 5x - 20$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ எனில்,}$$

$$2x - 5y + 8 = 0,$$

$$-5x + 2y - 20 = 0.$$

இவைகளின் தீர்வுகள் அதிபரவரினின் மையம் ஆகும்.

எனவே, அதிபரவரினின் மையம் $(-4, 0)$.

ஆதிவடிவ மையத்திற்கு மாற்றினால் மையக் கூம்பு வரினின் சமன்பாடு

$$x^2 - 5xy + y^2 + c_1 = 0.$$

$$c_1 = 5x_1 + fy_1 + c$$

$$= 4(-4) + 0 + 15 = -1$$

$$\therefore x^2 - 5xy + y^2 = 1.$$

அச்சக்களின் திசைகள் யின் வரும் சமன்பாடுகளிலிருந்து அதிவடிவம்,

$$\left(A - \frac{1}{r^2}\right) \left(B - \frac{1}{r^2}\right) = H^2.$$

$$\text{இங்கு } A = 1, B = 1, H = -\frac{5}{2} \text{ ஆகனில்,}$$

$$\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = \frac{25}{4}.$$

$$\therefore (r^2 - 1)^2 = \frac{25}{4} r^4$$

$$(அ-ஆ) \quad 21r^4 + 8r^2 - 4 = 0.$$

$$\therefore r^2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 888}}{42}$$

$$= \frac{-8 \pm 30}{42}$$

$$\therefore r_1^2 = \frac{2}{7}, r_2^2 = -\frac{8}{3}.$$

எனவே, குறுக்கச்சின் தளம்

$$2r_1 = 2\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

துணையச்சின் தளம்

$$2\sqrt{|r_2^2|} = 2\sqrt{\left|-\frac{8}{3}\right|} = 2\sqrt{\frac{8}{3}}.$$

குறுக்கச்சின் சமன்பாடு

$$\left(A - \frac{1}{r^2}\right)x + Hy = 0$$

$$(அ - து) \left(1 - \frac{7}{2}\right)x - \frac{5}{2}y = 0$$

$$(அ - து) x + y = 0.$$

எனவே, பரமழய ஆயக்களைப் பொறுத்துக் குறுக்கச்சின் சமன்பாடு

$$(x + 4) + y = 0$$

$$(அ - து) x + y + 4 = 0.$$

துணையச்சின் சமன்பாடு

$$y - x + K = 0$$

இது $(-4, 0)$ புள்ளி வழிச் செல்வின்,

$$4 + K = 0. \quad \therefore K = -4.$$

எனவே, பரமழய ஆயக்களைச் சேர்த்து துணையச்சின் சமன்பாடு

$$y - x - 4 = 0$$

$$(அ - து) \quad x - y + 4 = 0.$$

சமன்பாடு (1)-இல், $y = 0$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$(அ - து) \quad (x + 3)(x + 5) = 0.$$

எனவே, அதிபரவரைவு x ஆயத்தை $P(-3, 0)$, $P'(-5, 0)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

சமன்பாடு (1)-இல், $x = 0$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$y^2 - 10y + 15 = 0.$$

$$\therefore \quad \left. \begin{array}{l} y = 10.2 \\ y = .8 \end{array} \right\} \text{(தேராயங்கள்).}$$

எனவே, அதிபரவரைவு y ஆயத்தை $Q(0, .5)$, $Q'(0, 10.2)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

$$e = \frac{r_1^2 + |r_2|^2}{r_1^2} = \frac{\frac{8}{7} + \frac{8}{9}}{\frac{8}{7}}$$

$$= \frac{20}{31} \times \frac{7}{8} = \frac{10}{8}$$

$$\therefore e = \sqrt{\frac{10}{8}}.$$

S , S' குவியங்கள் எனவும், C அதிபரவரைவின் மையமெனவும் கொள்வோம்,

$$CS = CS' = r_1 e$$

$$= \sqrt{\frac{8}{7}} \sqrt{\frac{10}{8}} = \sqrt{\frac{20}{21}} = 2\sqrt{\frac{5}{21}}.$$

$$\text{செய்வகாலம்} = 2 \frac{|r_2|^2}{r_1} = \frac{2 \cdot \frac{8}{9}}{\sqrt{\frac{8}{7}}}$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{7}{8}} = 2\sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{3}.$$

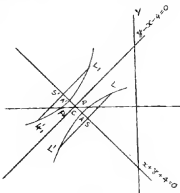
அதிபரவளைவின் படம் வரைய முதலில் குறுக்கச்சையும், துணைபச்சையும் வரையவும். இவைகள் வெட்டும் புள்ளி அதிபரவளைவின் மையம் C ஆகும்.

குறுக்கச்சின்மீது $A, A'; S, S'$ புள்ளிகளை $CA = CA' = \sqrt{\frac{2}{7}}$, $CS = CS' = 2\sqrt{\frac{8}{21}}$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும். S, S' புள்ளிகள் வழி குறுக்கச்சுக்குச் செங்குத்தாகக் கோடுகள் வரைந்து, அவைகளின்மீது $L, L'; L_1, L_1'$ என்ற புள்ளிகளை $SL = SL' = S'L_1 = S'L_1' = \frac{1}{3}\sqrt{14}$ என்ற அளவில் குறிக்கவும்.

அதிபரவளைவு x ஆயத்தை P, P' புள்ளிகளிலும், y ஆயத்தை Q, Q' புள்ளிகளிலும் வெட்டுகிறது.

$A, A'; P, P'; Q, Q'; L, L'; L_1, L_1'$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வளைவு அதிபரவளைவாகும்.

அதிபரவளைவின் படம் கீழ்க் கண்டவாறு தோராயமாக இருக்கும்.



படம் 84.

பயிற்சி 9.1.

கீழ்க் காணும் கூம்பு வளைவுகளின் தன்மைகள் காண்க.

$$1. \quad 2x^2 - 8xy - 8y^2 - x - 4y + 6 = 0.$$

$$2. \quad 18x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0.$$

$$3. \quad y^2 - 2\sqrt{3}xy + 3x^2 + 6x - 4y + 6 = 0.$$

$$4. \quad 7x^2 - 17xy + 6y^2 + 23x - 2y - 20 = 0.$$

$$5. \quad 86x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 128y + 81 = 0.$$

கீழ்க் காணும் கூம்பு வளைவுகளின் தொலைத் தொடுகோடுகள் காண்க.

$$6. \quad x^2 - xy - 2y^2 + 8y - 2 = 0$$

$$7. \quad y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0.$$

கீழ்க் காணும் கூம்பு வளைவுகளின் அச்சங்களின் நீளம் காண்க.

$$8. \quad 5x^2 + 6xy + 5y^2 + 12x + 4y - 4 = 0.$$

$$9. \quad x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 50 = 0.$$

$$10. \quad 14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0.$$

கீழ்க் காணும் கூம்பு வளைவுகளின் அச்சங்கள் தம் சமன்பாடுகள் காண்க.

$$11. \quad x^2 + 4xy - 8y^2 - 28x + 36y + 16 = 0.$$

$$12. \quad 11x^2 + 4xy + 14y^2 - 28x - 32y + 23 = 0.$$

$$13. \quad (x-2y+1)^2 + (4x+2y-3)^2 = 10.$$

$$14. \quad 17x^2 + 12xy + 5y^2 - 48x - 26y + 33 = 0.$$

$$15. \quad 6x^2 + 4xy + 6y^2 - 20x + 4y + 14 = 0.$$

கீழ்க் காணும் கூம்பு வளைவுகளை வரைக.

$$16. \quad 4(x-3)^2 + 5(y-2)^2 = 0.$$

$$17. \quad 3(x-4)^2 - 4(y-5)^2 = 36.$$

$$18. \quad 25x^2 - 120xy + 144y^2 - 476x - 1494y - 1414 = 0.$$

19. $x^2 - 8xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$

20. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0.$

21. $2x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0.$

22. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0.$

23. $x^2 + 12xy - 4y^2 - 6x + 6y + 9 = 0.$

24. $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0.$

25. $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 56y + 71 = 0.$

26. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஒரு செவ்வக, அதிபரவளை வளைவின், நொய்தத் தொடு கோடுகளின் சந்திப்பு அதன் சமன்பாடு, $E(h^2 - ab)^{\frac{3}{2}} \Delta y - \Delta = 0$ என நிறவுக.

27. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (bx + ay - ab)^2$ என்ற பரவளையின் செவ்வகவ நீளம் $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ என நிறவுக.

28. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ என்ற பரவளையின் குவியம், அச்ச, இயக்குவரை ஆகியவற்றைக் காண்க.

29. $ax^2 + 2hxy + by^2 = d$ என்ற கூம்பு வளையின் வரை அச்சக்கூற்றம் (semi axes) நீளங்களின் பெருக்குத் தொகை $\sqrt{\frac{d}{a^2 - h^2}}$ என நிறவுக.

30. $x^2 + y^2 = (2x + 4y + 10)^2$ என்ற சமன்பாட்டை விளக்குக.

விடைகள்

1. அதிபரவளைவு, மையம் $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right)$, $2x^2 - 8xy - 8y^2 + 7 = 0.$

2. நீள் வட்டம், மையம் $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $12x^2 - 16xy + 87y^2 = 4.$

3. கூம்பு வளைவு ஒரு பரவளை வாகும்.

4. அதிபரவரினவு, வளைபு (2, 3), $7x^2 - 17xy + 6y^2 = 0$.
5. நீள் வட்டம், வளைபு (2, -3), $36x^2 + 24xy + 25y^2 = 180$.
6. $x^2 - xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$.
7. $(y+x-2)(y-2x-3) = 0$.
8. $\sqrt{6}; \frac{1}{2}\sqrt{6}$.
9. $2\sqrt{50}; 2\sqrt{-12}$.
10. $2\sqrt{6}; 4$.
11. $4x + 3y + 11 = 0, 3x - 4y + 2 = 0$.
12. $x + 2y - 3 = 0, 2x - y - 1 = 0$.
13. $4x + 2y - 8 = 0, x - 2y + 1 = 0$.
14. $2x + y - 3 = 0, x - 2y + 1 = 0$.
15. $x - y - 3 = 0, x + y - 1 = 0$.
16. நீள் வட்டம், வளைபு (3, 2), பேரத்த $y - 2 = 0$, சிற்றச்சு $x - 3 = 0$, பேரச்சின் நீளம் $2\sqrt{5}$, சிற்றச்சின் நீளம் 4.
17. அதிபரவரினவு, (4, 5), குறுக்கச்சு $4\sqrt{5}$, ஹிப்பைச்சு $x - 4 = 0$, குறுக்கச்சு $y - 5 = 0$.
18. பரவரினவு மூளை (-2, 3), ஆச்சு $5x - 12y + 43 = 0$, செங்கவகலம் 6, மூளைமீட்த்துத் தொடுகோடு $12x + 5y + 9 = 0$.
19. $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$. அதிபரவரினவு, வளைபு (-2, 2). குறுக்கச்சு $2\sqrt{2}$, ஹிப்பைச்சு $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.
20. பரவரினவு, மூளை $\left(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$, ஆச்சு $2x + 2y - 1 = 0$, மூளைமீட்த்துத் தொடுகோடு $4x - 4y + 5 = 0$, செங்கவகல நீளம் $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

21. பரவரிசை, முனை $\left(-\frac{29}{25}, \frac{29}{25}\right)$, செங்குகை நீளம் 8, அச்ச $3x - 4y + 7 = 0$, முனைவிடத்துத் தொடுகோடு $4x + 8y + 2 = 0$.

22. பரவரிசை, முனை $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$, செங்குகை நீளம் 8, அச்ச $4x - 3y + 2 = 0$, முனைவிடத்துத் தொடுகோடு $3x + 4y - 1 = 0$.

23. அதிபரவரிசை, மையம் $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, குறுக்கச்ச $8x + 2y - 1 = 0$, துணையச்ச $4x - 8y + 8 = 0$, குறுக்கச்சின் நீளம் $2\sqrt{\frac{10}{8}}$, துணையச்சின் நீளம் $2\sqrt{\frac{-10}{8}}$.

24. அதிபரவரிசை, மையம் $(-1, 1)$, குறுக்கச்ச $\frac{4}{\sqrt{8}}$, துணையச்ச $2\sqrt{-4}$, குறுக்கச்ச $x - y + 2 = 0$, துணையச்ச $x + y = 0$.

25. நீள் வட்டம், மையம் $(+2, +3)$, பேர்த்த $2x - y - 1 = 0$, $2\sqrt{6}$; சிற்ற்த்த $x + 2y - 8 = 0$, 4.

26. குவியம் $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$, அச்ச $x - y = 0$, இயக்கு வரை $x + y = 0$.

27. பரவரிசை $\left(\frac{23}{16}, -\frac{3}{16}\right)$, அச்ச $4x + 4y = 5$, செங்குகை $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, முனைவிடத்துத் தொடுகோடு $8x - 8y = 18$.

9-10. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற கூடுபு வரிசைக்கு (x_1, y_1) புள்ளிவிடத்துத் தொடுகோடு

(x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos \theta} = \frac{y - y_1}{\sin \theta} = r \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இக் கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொகைகள்

$$(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta) \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{இப் புள்ளி } ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (2)$$

என்ற கூம்பு வளைவில் மீதிருப்பின்,

$$a(x_1 + r \cos \theta)^2 + 2h(x_1 + r \cos \theta)(y_1 + r \sin \theta) + b(y_1 + r \sin \theta)^2 + 2g(x_1 + r \cos \theta) + 2f(y_1 + r \sin \theta) + c = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad & r^2 [a \cos^2 \theta + 2h \sin \theta \cos \theta + b \sin^2 \theta] \\ & + 2r [(ax_1 + hy_1 + g) \cos \theta + (hx_1 + by_1 + f) \sin \theta] \\ & + ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \dots (3) \end{aligned}$$

இது r -இல் இருபடிச் சமன்பாடாக தன்னை, இதன் இரு மதிப்புகள் கணக்காக r_1, r_2 எனப்படவ, (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வளைவுகள் (1), (2) வெட்டும் இரு புள்ளிகளின் ஹாங்ககளை அளிக்கறும்.

(x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு (1), (x_1y_1) புள்ளி விடத்துக் கூம்பு வளைவு (2)-இன் தொடுகோட்டெனின் $r_1 = r_2 = 0$.

(அ-து) சமன்பாடு (3)-இன் இரு தீர்வுகளும் பூச்சியமாம்.

$$\therefore ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \dots (4)$$

$$(ax_1 + hy_1 + g) \cos \theta + (hx_1 + by_1 + f) \sin \theta = 0 \quad \dots (5)$$

$$(5)\text{-இலிருந்து } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = - \frac{ax_1 + hy_1 + g}{hx_1 + by_1 + f}.$$

$$\text{அல்லது, (1)-இலிருந்து } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

$$\therefore \frac{y - y_1}{x - x_1} = - \frac{ax_1 + hy_1 + g}{hx_1 + by_1 + f}.$$

$$\text{(அ-து)} \quad (ax_1 + hy_1 + g)(x - x_1) + (hx_1 + by_1 + f)(y - y_1) = 0.$$

$$\begin{aligned} & axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g + fy \\ & = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + gx_1 + fy_1. \end{aligned}$$

இரு பக்கமும் $gx_1 + fy_1 + c$ -ஐக் கூட்டி,

$$\begin{aligned} & axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c \\ &= ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \\ &= 0 \text{ (சமன்பாடு 4-இல் படி).} \end{aligned}$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு

$$\begin{aligned} & axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) \\ &+ f(y + y_1) + c = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-ஆ)} \quad & x(ax_1 + hy_1 + g) + y(hx_1 + by_1 + f) \\ &+ (gx_1 + fy_1 + c) = 0. \end{aligned}$$

9.11. $lx + my + n = 0$ வரையிலும் கோடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ கூம்பு வளைவுக்குத் தொடுகோட்டாக அமைவதே தேவையான கட்டுப்பாடு

$$lx + my + n = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (2)$$

கோடு (1), கூம்புவளைவு (2)-க்கு (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து தொடுகோட்டாகக் கொள்வோம்.

பத்தி 9.10-இன்படி (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} & axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) \\ &+ f(y + y_1) + c = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(அ - ஆ)} \quad & x(ax_1 + hy_1 + g) + y(hx_1 + by_1 + f) \\ &+ (gx_1 + fy_1 + c) = 0 \quad \dots \quad (3) \end{aligned}$$

என்பாடுகளை (1), (3) ஒரே நேரக் கோட்டாகக் குறிக்கும்,

$$\therefore \frac{ax_1 + hy_1 + g}{l} = \frac{hx_1 + by_1 + f}{m} = \frac{gx_1 + fy_1 + c}{n} = \lambda.$$

$$(அ - ஐ) \quad ax_1 + by_1 + g = l\lambda \quad \dots \quad (4)$$

$$hx_1 + by_1 + f = m\lambda \quad \dots \quad (5)$$

$$gx_1 + fy_1 + c = n\lambda \quad \dots \quad (6)$$

(x_1, y_1) புள்ளி $lx + my + n = 0$ கோட்டின் மீதுள்ளது.

$$\therefore \quad lx_1 + my_1 + n = 0 \quad \dots \quad (7)$$

சமன்பாடுகள் (4), (5), (6), (7)-இல் x_1, y_1, λ -ஐ நீக்கினால்,

$$\begin{vmatrix} a & b & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ என்கிறோம்.}$$

இதை விரிவு படுத்தினால்,

$Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Fmn + Gnl + 2Hlm = 0$ என்கிறோம்.
இங்கு A, B, C, F, G, H எல்பவை

$$\begin{vmatrix} a & b & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

என்ற ஆணித் கோவைகள் (determinant) a, b, c, f, g, h என்ற
உறுதிகளின் (elements) இணைக்களை வாரும் (cofactors).

9-12. கூம்பு வளைவைச் சார்ந்த (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்
கோட்டின் சமன்பாடு

நாம் முன்னர் கண்டது போல, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ கூம்பு வளைவைச் சார்ந்த (x_1, y_1) புள்ளியின்
இசைக் கோடு ஆகலது (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து கூம்பு வளைவுக்கு
வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடுதான், (x_1, y_1) புள்ளி
மீட்டத்துக் கூம்பு வளைவுக்கு வரையும் தொடுகோட்டின் சமன்
பாட்டின் வடிவிலிருக்கும்.

(அ-து) (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

9-13. $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு $Q(x_2, y_2)$ புள்ளிவழிச் செல்லிக், Q புள்ளியின் இசைக்கோடு P புள்ளிவழிச் செல்லும்.

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

கூம்பு வளைவைச் சாத்த (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

இது $Q(x_2, y_2)$ வழிச் செல்லின்,

$$ax_1x_2 + h(x_2y_1 + x_1y_2) + by_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c = 0 \quad \dots \quad (2)$$

கூம்பு வளைவு (1)-ஐச் சாத்த $Q(x_2, y_2)$ புள்ளியின் இசைக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$axx_2 + h(xy_2 + x_2y) + byy_2 + g(x + x_2) + f(y + y_2) + c = 0.$$

இது சமன்பாடு (2)-இன்படி $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும்.

இவ்விரு புள்ளிகளுக்கும் கூம்புவளைவிலினைச் சாத்த துணையியல் புள்ளிகள் எனப்படும்.

9-14. $l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ துணையியல்கோடுகளாக அமைவத் தேவையான கட்டுப்பாடு

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

கூம்பு வளைவு (1)-ஐச் சாத்த $l_1x + m_1y + n_1 = 0$... (2)

கோட்டின் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக்கொள்ளோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$x(ax_1 + hy_1 + g) + y(hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடு (1), (3) ஒரே கோட்டைக் குறிக்கும்.

எனவே, பத்தி 8.11-இன்படி,

$$ax_1 + by_1 + g - \lambda l_1 = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$$hx_1 + ky_1 + f - \lambda m_1 = 0 \quad \dots \quad (5)$$

$$ex_1 + fy_1 + c - \lambda n_1 = 0 \quad \dots \quad (6)$$

$l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ நுண்ணியக் கோடுகள் எனின், (x_1, y_1) புள்ளி $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ கோட்டின் மீதவையும்,

$$\therefore l_2x_1 + m_2y_1 + n_2 = 0 \quad \dots \quad (7)$$

சமன்பாடுகள் (4), (5), (6), (7)-இல் x_1, y_1, λ -ஐ நீக்கிற்,

$$\begin{vmatrix} a & b & g & l_1 \\ h & k & f & m_1 \\ e & f & c & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{என்றும்.}$$

இதைச் சுருக்கிற்,

$$Al_1l_2 + Bm_1m_2 + Cn_1n_2 + F(m_1n_2 + m_2n_1) + G(n_1l_2 + n_2l_1) + H(l_1m_2 + l_2m_1) = 0$$

9.15. (x_1, y_1) -ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாளின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

என்ற வட்ட வளைவின் நாளின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

நாளின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{\cos \theta} = \frac{y-y_1}{\sin \theta} = r \quad \dots \quad (2)$$

எனின், அதன் மீதுள்ள பாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைவு $(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta)$ ஆகும்.

கோடு (2), கூம்பு வளைவு (1)-ஐ வெட்டும் புள்ளிகளைக் காணும் சமன்பாடு (1)-இல் $x = x_1 + r \cos \theta$, $y = y_1 + r \sin \theta$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$\begin{aligned} & a(x_1 + r \cos \theta)^2 + 2h(x_1 + r \cos \theta)(y_1 + r \sin \theta) \\ & + b(y_1 + r \sin \theta)^2 + 2g(x_1 + r \cos \theta) \\ & + 2f(y_1 + r \sin \theta) + c = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(அ - து)} \quad & r^2(a \cos^2 \theta + 2h \sin \theta \cos \theta + b \sin^2 \theta) \\ & + 2r[(ax_1 + hy_1 + g) \cos \theta + (hx_1 + by_1 + f) \sin \theta] \\ & + x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0. \end{aligned}$$

இது r -இல் இருபடிச் சமன்பாடாகவே இந்த இரு திசைகள் உண்டு. ஆகவே r_1, r_2 எனில்,

$$r_1 + r_2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore (ax_1 + hy_1 + g) \cos \theta + (hx_1 + by_1 + f) \sin \theta = 0. \quad \dots \quad \text{(8)}$$

சமன்பாடு (8)-இலிருந்து

$$\cos \theta = \frac{x - x_1}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y - y_1}{r}.$$

$$\begin{aligned} \therefore (ax_1 + hy_1 + g) \frac{x - x_1}{r} \\ + (hx_1 + by_1 + f) \frac{y - y_1}{r} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{(அ - து)} \quad (x - x_1)(ax_1 + hy_1 + g) + (y - y_1)(hx_1 + by_1 + f) = 0.$$

$$\begin{aligned} \therefore & axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + gx + fy \\ & = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + gx_1 + fy_1. \end{aligned}$$

இது பக்கமும் $gx_1 + fy_1 + c$ -ஐக் கூட்டி,

$$\begin{aligned} & axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) \\ & + f(y + y_1) + c \\ & = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \end{aligned}$$

$$\text{(அ - து)} \quad T = S_1.$$

9-16. இரண்டு தாள்கள் தம் தடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவழி

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (1)$$

கூம்பு வளைவு தாள்களின் ஒன்றின் தடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

எனவே, அத்தாளின் சமன்பாடு

$$T = S_1$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad & axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c \\ & = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad & x(ax_1 + hy_1 + g) + y(hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) \\ & = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c. \end{aligned}$$

$$\text{இதன் சரிவு} = -\frac{ax_1 + hy_1 + g}{hx_1 + by_1 + f}$$

இவையான தாள்களின் சரிவுகள் சமம். அது மாறில் m எனக் கொண்டால்,

$$m = -\frac{ax_1 + hy_1 + g}{hx_1 + by_1 + f}$$

$$\therefore (ax_1 + hy_1 + g) + m(hx_1 + by_1 + f) = 0.$$

$$\text{(அ-து)} \quad x_1(a + mh) + y_1(h + mb) + (g + mf) = 0.$$

$$\therefore \text{தடுப்புள்ளி } (x_1, y_1)\text{-இன் இயங்கு வழி}$$

$$x(a + mh) + y(h + mb) + (g + mf) = 0.$$

இரண்டு தாள்கள் தம் தடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி கூம்பு வளைவின் விட்டம் எனப்படும்.

9-17. இரு விட்டங்களில் ஒன்று மற்றதன் இரண்டு தாள்களைச் சமமாகப் பிக்குமெனின், அவைகள் துணையிய விட்டங்கள் எனப்படும்.

$$y = m_1x \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இருபடிசின் பொதுச் சமன்பாடு, கூடுபு வளைவு வரைதல் 489

என்ற விட்டத்திற்கு இணையாக உள்ள சிறிதொரு விட்டத்தின் சமன்பாடு

$$y = m_2x \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

பத்தி 9-16 இன்படி அளவிடத்தின் சமன்பாடு

$$(a+m_1h)x + (h+m_1b)y + (g+m_1f) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$\text{எனவே, } m_2 = -\frac{a+m_1h}{h+m_1b}$$

$$(அ-அ) \quad hm_2 + m_1m_2b + a + m_1h = 0$$

$$(அ-அ) \quad a + (m_1 + m_2)h + m_1m_2b = 0$$

எனவே, $y = m_1x$, $y = m_2x$ இணையாக விட்டங்களெனின்,

$$a + (m_1 + m_2)h + hm_1m_2 = 0.$$

9-18. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ கூடுபு வளைவுக்கு $Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 0$ குறிக்கும் இரு கோடுகள் இணையாகக் கொடுக்கவந்ததற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 0$ குறிக்கும் இருகோடுகளின் தனித்தனிக் சமன்பாடு

$$y = m_1x, \quad y = m_2x \text{ எனின்,}$$

$$m_1 + m_2 = -\frac{2H}{B}, \quad m_1m_2 = \frac{A}{B}.$$

$y = m_1x$, $y = m_2x$ இணையாக விட்டங்கள் எனின்,

$$a + (m_1 + m_2)h + bm_1m_2 = 0.$$

$$\therefore a + \left(-\frac{2H}{B}\right)h + b\left(\frac{A}{B}\right) = 0$$

$$(அ-அ) \quad aB - 2Hh + bA = 0$$

$$(அ-அ) \quad aB + bA = 2Hh.$$

9.19. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து கூம்பு வளைவுக்கு வரையும் இடைவெளித் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

(x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செங்குத்த கோடு

$$\frac{x - x_1}{\cos \theta} = \frac{y - y_1}{\sin \theta} = r \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\text{இது } ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (2)$$

எனும் கூம்பு வளைவை வெட்டுமிடங்களில்,

$$\begin{aligned} & a(x_1 + r \cos \theta)^2 + 2h(x_1 + r \cos \theta)(y_1 + r \sin \theta) \\ & + b(y_1 + r \sin \theta)^2 + 2g(x_1 + r \cos \theta) \\ & + 2f(y_1 + r \sin \theta) + c = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{அ - து}) \quad & r^2[a \cos^2 \theta + 2h \cos \theta \sin \theta + b \sin^2 \theta] \\ & + 2r[(ax_1 + hy_1 + g) \cos \theta + (hx_1 + by_1 + f) \sin \theta] \\ & + ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \\ & \dots \quad \dots \quad (3) \end{aligned}$$

இது r -இல் இருபடிச் சமன்பாடு. இதன் தீர்வுகள் r_1, r^2 எனில், அவைகள் (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வெட்டும் புள்ளிகளின் தூரங்களை அளிக்ரும்.

கோடு (1), கூம்பு வளைவு (2)-க்கு தொடுகோடுகளில்,

$$r_1 = r_2$$

$$\begin{aligned} \therefore & 4[(ax_1 + hy_1 + g) \cos \theta + (hx_1 + by_1 + f) \sin \theta]^2 \\ & = 4[a \cos^2 \theta + 2h \cos \theta \sin \theta + b \sin^2 \theta] \\ & \times [ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c] \quad \dots \quad (4) \end{aligned}$$

$$(1)\text{-இலிருந்து } \cos \theta = \frac{x - x_1}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y - y_1}{r}.$$

$$\begin{aligned} \therefore & 4 \left[(ax_1 + hy_1 + g) \frac{x - x_1}{r} \right. \\ & \left. + (hx_1 + by_1 + f) \frac{y - y_1}{r} \right]^2 \end{aligned}$$

$$= 4 \left[a \left(\frac{x-x_1}{r} \right)^2 + 2h \frac{(x-x_1)(y-y_1)}{r^2} + b \left(\frac{y-y_1}{r} \right)^2 \right] \\ \times k [ax_1^2 + 2hxy_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c].$$

வழக்கமான குறியீட்டின்படி,

$$[(ax_1 + hy_1 + g)(x-x_1) + (hx_1 + by_1 + f)(y-y_1)]^2 \\ = [a(x-x_1)^2 + 2h(x-x_1)(y-y_1) + b(y-y_1)^2] S_1.$$

$$\therefore [axx_1 + hxy_1 + gx - ax_1^2 - hx_1y_1 - gx_1 + hx_1y + byy_1 \\ + fy - hx_1y_1 - hy_1^2 - fy_1^2]$$

$$= \{ (ax^2 + 2hxy + by^2) - 2 [axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1] \\ + (ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2) \} S_1$$

$$\text{(அ-ஆ)} [(axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + gx + fy) \\ - (ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + gx_1 + fy_1)]^2 \\ = \{ (ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c) \\ - 2 [axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c] \\ + (ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) \} S_1$$

$$\text{(அ-ஆ)} [(axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c) \\ - (ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)]^2 \\ = \{ S - 2T + S_1 \} S_1$$

$$\text{(அ-ஆ)} [T - S_1]^2 = SS_1 - 2TS_1 + S_1^2, \\ T^2 - 2TS_1 + S_1^2 = SS_1 - 2TS_1 + S_1^2.$$

$$\therefore T^2 = SS_1.$$

$$\text{இங்கு } S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c.$$

$$S_1 = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$$

$$T = axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x+x_1) \\ + f(y+y_1) + c.$$

9.20. குத்துத் தொடுகோடு வட்டம்

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

(x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து கூம்பு வளைவு (1)-க்கு வரையுந்
இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$T^2 = SS_1$$

$$\begin{aligned} (\text{அ-ஆ}) [x(ax_1 + hy_1 + g) + y(hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c)]^2 \\ = (ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c) \end{aligned}$$

$$\times (ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) \dots (2)$$

இதில் x^2 -இன் கெழு

$$\begin{aligned} &= (ax_1 + hy_1 + g)^2 - a(ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 \\ &\quad + 2gx_1 + 2fy_1 + c). \end{aligned}$$

y^2 -இன் கெழு

$$\begin{aligned} &= (hx_1 + by_1 + f)^2 - b(ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 \\ &\quad + 2gx_1 + 2fy_1 + c). \end{aligned}$$

தொடு கோடுகள் தம்முள் செங்குத் தெனின்,

சமன்பாடு (2)-இன்

$$x^2\text{-இன் கெழு} + y^2\text{-இன் கெழு} = 0.$$

$$\begin{aligned} \therefore (ax_1 + hy_1 + g)^2 + (hx_1 + by_1 + f)^2 \\ = (a+b)(ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{அ-ஆ}) (ab - h^2)(x_1^2 + y_1^2) + 2x_1(bg - fh) \\ + 2y_1(af - gh) + c(a+b) - f^2 - g^2 = 0. \end{aligned}$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$\begin{aligned} (ab - h^2)x^2 + (ab - h^2)y^2 + 2(bg - fh)x \\ + 2(af - gh)y + c(a+b) - f^2 - g^2 = 0. \end{aligned}$$

இஃது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடாகும். எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து கூம்பு வளைவு (1)-க்கு வரையுந் இரட்டைத் தொடு கோடுகள் தம்முள் செங்குத் தெனின், (x_1, y_1) புள்ளியின்

இருப்புவிற் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல் 448

இயக்கு வழி ஒரு வட்டமாகும். இது கூம்பு வளைவின் குத்துத் தொடுகோடு வட்டம் எனப்படும்.

இத்த வட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$$Cx^2 + Cy^2 - 2Gx - 2Fy + A + B = 0$$

என எழுதலாம். இதன் மையம் $\left(\frac{G}{c}, \frac{F}{c}\right)$. இது கூம்பு வெட்டியின் மையமாகும்.

கூம்பு வெட்டி பரவளைவு எனின்,

$$a^2 - b^2 = 0 \quad (\text{அ-து}) \quad c = 0.$$

அத் நிலையில் குத்துத் தொடுகோடு வட்டம்

$$2Gx + 2Fy - A - B = 0$$

எனும் கோடாகிறது.

9-21. மையக் கூம்பு வளைவின் தாங்கு குவியங்களில் இரண்டு மையமானவை.

மையக் கூம்பு வளைவின் (central conic) சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 = 1 \quad \dots \dots (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

குவியங்களில் ஒன்றின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1) எனவும், ஒத்த இயக்கு வரை $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ எனவும் கொள்வோம்.

மையத் தொலைகிதம் e எனின்,

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2} = e^2$$

$$(\text{அ-து}) \quad (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = e^2(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2 \dots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கூம்பு வளைவைக் குறிக்கும்.

சமன்பாடு (1)-இல் xy -இன் கெடு பூச்சியமாதலின் சமன்பாடு (2)-இலும் xy -இன் கெடு பூச்சியமாகும்.

$$\therefore e^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

$$e \neq 0, \therefore \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$(\text{அ-து}) \sin 2\alpha = 0.$$

$$\text{எனவே, } \alpha = 0 \text{ (அ-து) } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ஆகும்.}$$

\therefore இயக்குவரை ஆக்கக்களம் கார்டேனும் ஒன்றுக்கு இரண்டுமாகும்.

மேலும், சமன்பாடு (1)-இல் x, y -இன் கெடுக்கள் பூச்சியமாதலின், சமன்பாடு (2)-இலும் x, y -இன் கெடுக்கள் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore 2pe^2 \cos \alpha - 2x_1 = 0$$

$$2pe^2 \sin \alpha - 2y_1 = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad x_1 = pe^2 \cos \alpha \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$y_1 = pe^2 \sin \alpha \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

மீண்டும் சமன்பாடுகள் (1), (2)-இலிருந்து

$$\frac{a}{1-e^2 \cos^2 \alpha} = \frac{b}{1-e^2 \sin^2 \alpha} = \frac{-1}{x_1^2 + y_1^2 - p^2 e^2} \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

வகை (i) $\alpha = 0$ எனில், சமன்பாடுகள் (3), (4), (5)-இலிருந்து

$$x_1 = pe^2, \quad y_1 = 0, \quad e = \sqrt{1 - \frac{a}{b}}.$$

$$apx_1 = 1, \quad x_1^2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \text{ என்கிறோம்.}$$

$$\therefore x_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}.$$

எனவே, மையத்திலிருந்து $\pm \sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$ தூரத்தில் x ஆயத்திலிருந்து இரு குவியல்கள் உண்டு.

மேலும், $(x_1, 0)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$axx_1 + by(0) = 1$$

$$(அ-து) \quad x_1 = \frac{1}{ax_1} = p \quad [\because apx_1 = 1].$$

\therefore குவியத்தின் இசைக்கோடு அதன் ஒத்த இயக்குவரை யாகும்.

எனவே (ii) $\psi = \frac{\pi}{2}$ எனின், சமன்பாடுகள் (3), (4), (5)-இலிருந்து

$$x_1 = 0, \quad y_1 = pe^e, \quad e = \sqrt{1 - \frac{b}{a}}, \quad bpe = 1,$$

$$y_1^2 = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \quad \text{என்றாகும்.}$$

$$\therefore y_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}.$$

எனவே, y ஆயத்திலிருந்து மத்தியிரு குவியல்கள் மையத்திலிருந்து $\pm \sqrt{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$ தூரத்திலுள்ளன.

குவியல்களின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left[\pm \sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}, 0 \right], \left[0, \pm \sqrt{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)} \right]$$

a, b இரண்டும் மெய்யதிர்வுகள் கொண்டிருப்பின் ஒர் ஆயத்தின் மீதுள்ள இரு குவியல்கள் மெய்யானவையாகவும், பிறிதொர் ஆயத்தின் மீதுள்ள குவியல்கள் கற்பனையாகவும் இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது.

மீண்டும், அமைத்த தொலை விசிறங்கள் e_1, e_2 எனின்,

$$\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a} = \frac{a-b}{a-b} = 1.$$

9-22. ஐந்து குறித்த புள்ளிகளின் வழி ஒரே ஒரு கூம்பு வளைவு மட்டுமே வரலாம் கூடும்.

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (1)$$

இரு பக்கமும் c -ஆல் வகுக்க,

$$\frac{a}{c}x^2 + \frac{2h}{c}xy + \frac{b}{c}y^2 + \frac{2g}{c}x + \frac{2f}{c}y + 1 = 0.$$

$$(அ - து) \quad Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + 1 = 0. \quad (2)$$

சமன்பாடு (2)-இல் A, H, B, G, F என்ற ஐந்து மாறிகளைத் தீர்மானிக்க இவைகளை இணைத்த ஐந்து சமன்பாடுகளைக் காண வேண்டும். ஐந்து புள்ளிகள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளனவெனின், இப்புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கூம்பு வளைவில் அதைவகளின் ஆயத் தொலைகள் பொருத்தம். எனவே, நன்குறக் கிடைக்கும் ஐந்து சமன்பாடுகளிலிருந்து (independent equations) கூம்பு வளைவை ஒரே முறையில் (uniquely) தீர்மானிக்கலாம்.

9-23. இரு கூம்பு வளைவுகள் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும்.

கூம்பு வளைவுகளின் சமன்பாடுகள்

$$a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_2x^2 + 2h_2xy + b_2y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

இவைகளை x -இன் இருபடிச் சமன்பாடுகளாக மாற்றி அமைக்கலாம்.

$$\therefore a_1x^2 + 2(h_1y + g_1)x + b_1y^2 + 2f_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x^2 + 2(h_2y + g_2)x + b_2y^2 + 2f_2y + c_2 = 0.$$

இவைகளிலிருந்து x -ஐ நீக்கினால், y -இல் நான்குச் சமன்பாடு கிடைக்கப் பெறும். எனவே, y -க்கு நான்கு மதிப்புகள் உண்டாம்.

இந் நான்கு மதிப்புக்களுக்கும் x -க்கு நான்கு மதிப்புக்கள் இருக்குமாதலின், இரு கூம்பு வளைவுகளும் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும்.

இப் புள்ளிகளிலின்று பொருத்தும் புள்ளிகளெனின், இரு வளைவுகளின் தொடுகை, முதல் வரிசைத் தொடுகை (contact of first order) எனவும், மூன்று பொருத்தும் புள்ளிகளெனின், இரண்டாம் வரிசைத் தொடுகை (contact of second order) எனவும், நான்கும் பொருத்தும் புள்ளிகளெனின் மூன்றாம் வரிசைத் தொடுகை (contact of third order) எனவும் கூறப்படும்.



முதல் வரிசைத் தொடுகை



இரண்டாம் வரிசைத் தொடுகை

மூன்றாம் வரிசைத் தொடுகை

படம் 96

வி-24. இரு கூம்புவளைவுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிக் செல்லும் கூம்புவளைவின் சமன்பாடு

இரு கூம்புவளைவின் சமன்பாடுகள் $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ எனக் கொள்வோம்.

வின் $S_1 + \lambda S_2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம். இச்சமன்பாடு $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ என்ற கூம்புவளைவுகளுக்கும் பொதுவான புள்ளிகளுக்குப் பொருத்தும், இஃது இருபடியின் இருக்கு

மாதலின் $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ கூம்புவளைவுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கூம்பின் சமன்பாடு

$$S_1 + \lambda S_2 = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

மற்றொரு கட்டுப்பாடு கொடுக்கப் பெறின், λ -வின் மதிப்பு அறித்து, குறித்த கூம்பு வளைவின் சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

இவ்வாறே $S = 0$ கூம்பு வளைவும், $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ என்ற கொடுகனும் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$S + \lambda L_1 L_2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

9-25. பொதுக் குவியக் கூம்பு வளைவுகள்

பரவாறு கூம்புகளின் குவியங்கள் பொதுவானவை எனின், அக்கூம்புவளைவுகள் பொதுக் குவியக் கூம்பு வளைவுகள் (confocal conics) எனப் படும்.

குவியங்கள் பொதுவானவை யாதலின், அச்சுக்களும் பொதுவானவையாகும்.

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$

எனும் சமன்பாடு λ -வின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கும் வெவ்வேறு பொதுக் குவியக் கூம்பு வளைவுகளை அளிக்ரும். எனவே, பொதுக் குவிய நீள் வட்டங்களின் பொதுச் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

கீழ்க்காணும் பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுகளின் பண்புகளை எளிதில் திறுமலாம்.

1. இது பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுகள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும்.

2. பொதுக்குவியக் கூம்புவளைவுகளின் சாத்திர ஒருகோட்டின் இணைப்புள்ளிகளின் இயலகுவழி ஒரு நேர்க்கோடாகும்.

3. கூம்புவளைவின் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி வழி வரையக் கூடிய இது பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுகளில் ஒன்று அறிபா வளைவு, மற்றது நீள் வட்டமாகும்.

பயிற்சி 9.2.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்துடன் பொதுக்குறியம்

கொண்ட $\frac{x^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda_1} = 1$, $\frac{x^2}{a^2 + \lambda_2} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda_2} = 1$ என்ற கூம்பு வளைவுகள் (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லின் $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a^2 b^2}$, $x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2 = \lambda_1 + \lambda_2$ என நிறவுக.

2. λ_1, λ_2 என்பவை $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் பொதுக்குறியக் கூம்பு வளைவுகளின் துணைப்பங்குகள். P புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத் திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் இடையே உள்ள கோணம் 2θ எனின், $\tan 2\theta = \frac{2\sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1 + \lambda_2}$ என நிறவுக.

3. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ என்ற கூம்பு வளைவின் அச்சக்கள் தம் சமன்பாடு $xy(a-b) = h(x^2 - y^2)$ என நிறவுக.

4. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$, $Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 1$ என்பவை பொதுக்குறியக் கூம்பு வளைவுகளெனின்,

$$\frac{(a-b)^2 + 4h^2}{(ab-h^2)^2} = \frac{(A-B)^2 + 4H^2}{(AB-H^2)^2} \text{ என நிறவுக.}$$

5. குறித்த ஒரு கோட்டைத் தொடுப்பு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற கூம்பு வளைவுடன் பொதுக்குறியம் கொண்டுகள் கூம்பு வளைவு ஒன்றுதான் உண்டு என நிறவுக.

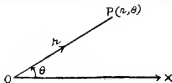
10. கோண தூர சமன்பாடுகள்

(Polar Equations)

10.1. கோண தூரக் கூறுகள் (Polar Co ordinates)

தமிழன் செக்குத்தாக வெட்டும் OX , OY என்ற கோடுகளால் பொறுத்து ஒரு புள்ளியைத் தீர்மானிப்பதை நாம் முன்னர்க் கண்டோம். இந்த அந்நியப்படுத்தித் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியைத் தீர்மானிக்கப் பயனுறும் மற்றொரு வழியைக் காண்போம்.

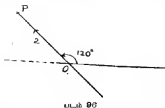
O என்ற ஒரு நிலைத் புள்ளியையும், O வழிச் செல்லும் OX என்ற ஒரு நிலையான கோட்டையும் சார்ந்து தளத்திலுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியையும் தீர்மானிக்கலாம் எடுத்துக் காட்டாக, P என்ற புள்ளியைத் தீர்மானிக்க O புள்ளியிலிருந்து அதன் தூரத்தையும், OP கோடு OX கோட்டுடன் மிதமிதக்கும் கோணத்தையும் P புள்ளியின் கூறுகளாகக் கொள்ளலாம். $OP=r$, $\angle XOP=\theta$ எனில் P புள்ளியின் கூறுகள் (r, θ) ஆகும். இதைக் கோண தூரக் கூறுகள் என்கிறோம். O , OX என்பனவ முறையே மூலநிலை (pole), தொடக்கக் கோடு (initial line) எனப்படும். r, θ என்பனவ முறையே ஆரை வெக்டர் (radius vector), ஆரைக் கோணம் (vectorial angle) எனப்படும். ஆரைக் கோணம் இடஞ்



படம் 85 (a)

சுழியாக (anti-clockwise) அளக்கப்பட்டால் நேர் மதிப்பு உடையதாகவும், வலஞ் சுழியாக அளக்கப்பட்டால் எதிர் மதிப்பு உடையதாகவும் கொள்ளப்படும். ஆகார வெக்டர் மூலையில்லுந்து புள்ளியின் திசையில் அளக்கப்பட்டால் நேர் மதிப்பும், எதிர் திசையில் அளக்கப்பட்டால் எதிர் மதிப்பும் கொண்டிருக்கும்.

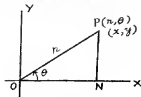
பாதிர் 1 :



படம் 96

படத்தில் கோண தூரக் கூறுகள் $(2, 120^\circ)$, $(-2, 300^\circ)$, $(2, -240^\circ)$, $(-2, -80^\circ)$ அனைத்தையும் P என்ற ஒரே புள்ளியைக் குறிக்கும்.

10.2. நேர்க்காட்டின் ஆயத் தொலைகளும் (Cartesian Coordinates), கோண தூரக் கூறுகளும்



படம் 97

O புள்ளியை மூலையாகவும் OX -ஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டால் P புள்ளியின் கோண தூரக் கூறுகள் (r, θ) ஆகும்.

இங்கு $OP=r$, $\angle XOP=\theta$.

P புள்ளியிலிருந்து OX -க்குச் செங்குத்தாக PN என்ற கோடு வரையவும்.

OX , OY ஆவங்களைப் பொத்துறு P புள்ளியின் ஆவத் தொலைகள் (x, y) என்போம்.

படத்தில், $ON = x$, $NP = y$.

செங்குதான முக்கோணம் NOP -யில்,

$$x = ON = OP \cos \theta = r \cos \theta$$

$$y = NP = OP \sin \theta = r \sin \theta$$

$$r = OP = \sqrt{ON^2 + NP^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\tan \theta = \frac{NP}{ON} = \frac{y}{x}.$$

மாதிரி 2 : மீள்வரும் கர்ட்டீசியன் (நேக்கரட்டியன்) சமன் பாடுகளைக் கோண மூர சமன்பாடுகளாக மாற்றுக.

$$(i) ax + bx + c = 0 \quad (ii) x^2 + y^2 = a^2 \quad (iii) x^2 + y^2 = r^2$$

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$(i) ar \cos \theta + br \sin \theta + c = 0$$

$$a \cos \theta + b \sin \theta + \frac{c}{r} = 0$$

$$(\text{அ-அ}) \quad a \cos \theta + b \sin \theta = \frac{k}{r}, \quad k = -c.$$

$$(ii) r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = a^2$$

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2$$

$$\therefore r^2 = a^2 \quad (\text{அ-அ}) \quad r = a.$$

$$(iii) r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = ar \sin \theta$$

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = ar \sin \theta$$

$$\therefore r^2 = ar \sin \theta$$

$$(\text{அ-அ}) \quad r = a \sin \theta.$$

பாதி 5: $r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$ என்ற சமன்பாட்டைத் தேக்காட்டின் சமன்பாடாக மாற்றுக.

$$r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$$

இரு பக்கமும் வர்க்கப்படுத்தினால்

$$\begin{aligned} r &= a \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{a}{2} (1 + \cos \theta) \end{aligned}$$

(அ - து) $2r = a(1 + \cos \theta)$.

இரு பக்கமும் r ஆல் பெருக்க,

$$2r^2 = ar(1 + \cos \theta)$$

$r \cos \theta = x$, $r^2 = x^2 + y^2$ என்ற பிரதிபலிப்பு,

$$2(x^2 + y^2) = a[\sqrt{x^2 + y^2} + x]$$

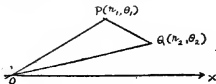
$$\therefore 2x^2 + 2y^2 - ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

இரு பக்கமும் வர்க்கப்படுத்தினால்,

$$(2x^2 + 2y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

10-3. (r_1, θ_1) , (r_2, θ_2) புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம்

P , Q புள்ளிகளின் ஆகத்தொலைவை (r_1, θ_1) , (r_2, θ_2) எனக் கொள்வோம்.



படம் 10-3

$$OP = r_1, \quad \angle XOP = \theta_1$$

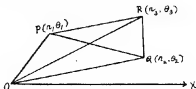
$$OQ = r_2, \quad \angle XOQ = \theta_2.$$

$$\begin{aligned} \triangle OPQ\text{-ஊடு, } PQ^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos \angle QOP \\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos (\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

$$\therefore PQ = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos (\theta_1 - \theta_2)}.$$

10.4. முக்கோணத்தின் பரப்பு

முக்கோணத்தின் மூன்று மூல்கள் $P(r_1, \theta_1)$, $Q(r_2, \theta_2)$, $R(r_3, \theta_3)$ எனக் கொள்வோம்.



படம் 99

$$\triangle PQR = \triangle OQR + \triangle ORP - \triangle OQP$$

$$\triangle OQR = \frac{1}{2} OQ \cdot OR \sin \angle QOR = \frac{1}{2} r_2 r_3 \sin (\theta_3 - \theta_2)$$

$$\triangle ORP = \frac{1}{2} OR \cdot OP \sin \angle ROP = \frac{1}{2} r_3 r_1 \sin (\theta_1 - \theta_3)$$

$$\triangle OQP = \frac{1}{2} OQ \cdot OP \sin \angle QOP = \frac{1}{2} r_2 r_1 [\sin (\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle PQR &= \frac{1}{2} [r_2 r_3 \sin (\theta_3 - \theta_2) + r_3 r_1 \sin (\theta_1 - \theta_3) \\ &\quad - r_2 r_1 \sin (\theta_1 - \theta_2)] \\ &= \frac{1}{2} [r_1 r_2 \sin (\theta_2 - \theta_1) + r_2 r_3 \sin (\theta_3 - \theta_2) \\ &\quad + r_3 r_1 \sin (\theta_1 - \theta_3)]. \end{aligned}$$

எடுத்துக் கொள் : $P(1, 30^\circ)$, $Q(2, 60^\circ)$, $R(3, 90^\circ)$ என்ற புள்ளி
கொள்கையையும் ஒத்தகோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

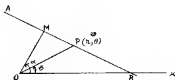
$$\Delta PQR = \frac{1}{2} [r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + r_2 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) - r_1 r_3 \sin(\theta_1 - \theta_3)]$$

$$\text{இங்கு } r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$$

$$\theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 60^\circ, \theta_3 = 90^\circ.$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta PQR &= \frac{1}{2} (2 \sin 30 + 3 \sin 30 + 3 \sin (-60)) \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right] \\ &= 2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

10.5. தேக்ககோடிகள் சமன்பாடு



மடம் 100

AB ஒரு தேக்ககோடெனவும், O புள்ளியிலிருந்து AB -க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு OM எனவும் கொள்வோம்.

$OM = p$ எனப்படும். OM கோடு தொடக்கக்கோடு OX உடனே நிற்பதிலும் கோணம் α என்க.

$P(r, \theta)$ புள்ளி AB கோட்டின் மீதுள்ளதெனில், $OP = r$, $\angle XOP = \theta$.

செங்கோண முக்கோணம் OPM -இல்

$$p = OP \cos \angle POM = r \cos (\alpha - \theta) = r \cos (\theta - \alpha).$$

$\therefore AB$ கோட்டின் சமன்பாடு

$$p = r \cos (\theta - \alpha).$$

குறிப்பு : AB கோட்டின் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ எனப் பிரதியிடுவர்.

$$r \cos \theta \cos \alpha + r \sin \theta \sin \alpha = p.$$

$\therefore r \cos (\theta - \alpha) = p$ என்றாகும்.

10-6. குறித்த இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு காணல்

குறித்த இரு புள்ளிகள் $P(r_1, \theta_1)$, $Q(r_2, \theta_2)$ எனக் கொள்வோம். PQ கோட்டின்மீது $R(r, \theta)$ யாதெனும் ஒரு புள்ளியெனில், $\triangle PQR$ -இல் பரப்புப் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \frac{1}{2} \left[r_1 r_2 \sin (\theta_2 - \theta_1) + r_2 r \sin (\theta - \theta_1) + r r_1 \sin (\theta_1 - \theta) \right] = 0.$$

இரு பக்கமும் $r r_1 r_2$ ஆல் வகுக்க.

$$\frac{\sin (\theta_2 - \theta_1)}{r} + \frac{\sin (\theta - \theta_1)}{r_1} + \frac{\sin (\theta_1 - \theta)}{r_2} = 0$$

$$(அ-ஆ) \quad \frac{\sin (\theta_2 - \theta_1)}{r} = \frac{\sin (\theta_2 - \theta)}{r_1} + \frac{\sin (\theta - \theta_1)}{r_2}.$$

10-7. நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு - பொதுவடிவம்

நேர்க்கோட்டின் கூறுகளில் ஒரு நேர்க்கோட்டின் பொதுச் சமன்பாடு $ax + by + c = 0$.

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ எனப் பிரதியிடின்,

$$ar \cos \theta + br \sin \theta + c = 0$$

$$(அ-து) \quad a \cos \theta + b \sin \theta = -\frac{c}{r}.$$

$l = -c$ எனக் கொண்டால்,

தேவர்கோட்டின் பொதுச் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = a \cos \theta + b \sin \theta \quad \text{என்றாகும்.}$$

இங் (1) $a \cos \theta + b \sin \theta = \frac{l}{r}$ கோட்டிற்கு நிரண்பாகம்

செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $a \cos \theta + b \sin \theta = \frac{r}{r}$ வடிவிலும், செங்குத்தாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $b \cos \theta - a \sin \theta = \frac{K}{r}$ என்ற வடிவிலும் இருக்கும்.

(2) $p = r \cos(\theta - \alpha)$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$p' = r \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \alpha\right) \quad \text{ஆகும்.}$$

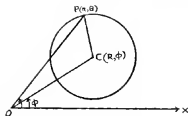
(3) $\theta = \alpha$ என்பது நுனைவு (pole) வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடாகும். இங்கு α என்பது அக் கோடு தொடக்கக் கோட்டுடன் சேர்ப்பிக்கும் கோணம்.

10-8. (R, ϕ) புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

வட்டத்தின் மையம் O எனவும், அதன் ஆரம் a எனவும் கொள்வோம்.

$P(r, \theta)$ என்பது வட்டத்தின் மேலுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியெனின்

$$\triangle OCP\text{-யில், } CP^2 = OC^2 + OP^2 - 2OC \cdot OP \cos \angle COP$$



படம் 101.

$$(அ - ஆ) \quad r^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi),$$

எனவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + (R^2 - r^2) = 0.$$

இதன் : (1) மூலையு வட்ட அமையமெனின், வட்டத்தின் சமன்பாடு $r = a$ ஆகும்.

(2) வட்ட அமையம் தொடக்கக் கோட்டின் மீதையுமெனின் $\phi = 0$.

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2 - 2Rr \cos \theta + (R^2 - r^2) = 0.$$

(3) மூலையு பரிதியின் மீதையுமெனின், $R = a$

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2 - 2ra \cos(\theta - \phi) = 0$$

$$(அ - ஆ) \quad r = 2a \cos(\theta - \phi).$$

(4) அமையம் தொடக்கக் கோட்டின்மீதும், மூலையு பரிதியின்மீதும் அமையுமெனின்,

$$\phi = 0, \quad R = a.$$

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$r^2 - 2a \cos \theta = 0$$

(அ-அ) $r = 2a \cos \theta$.

(6) வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2 - 2R \cos(\theta - \phi) + (R^2 - a^2) = 0.$$

இதன் தீர்வுகள் r_1, r_2 எனின்,

தீர்வுகளின் பெருக்குத்தொகை, $r_1 r_2 = R^2 - a^2$.

இது 0-வைச் சாரசாத ஒரு மாநிலியாகும்.

எனவே, நுழைவு O விடுக்து எத்தனைசரிதும் வட்டத்திற்கு வரையும் கோடு வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டுமெனின், OP, OQ ஒரு மாநிலியாகும்.

10.9. $r = 2a \cos \theta$ வட்டத்தின் மீதுள்ள $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நான்கு சமன்பாடு காணல்

வட்டத்தின் மீதுள்ள யாதெனும் இரு புள்ளிகள் P, Q -வின் ஆயக்கூறுகள் $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$ எனவும், நான் PQ -வின் சமன்பாடு

$$r \cos(\theta - \alpha) = \dots \dots \dots (1)$$

எனவும் கொள்வோம்.

P, Q புள்ளிகள் கோடு (1)-இன் மீதுகூப்பதாக,

$$r = r_1 \cos(\theta_1 - \alpha) = 2a \cos \theta_1 \cos(\theta_1 - \alpha) \dots (2)$$

$$r = r_2 \cos(\theta_2 - \alpha) = 2a \cos \theta_2 \cos(\theta_2 - \alpha) \dots (3)$$

$$\therefore 2a \cos \theta_1 \cos(\theta_1 - \alpha) = 2a \cos \theta_2 \cos(\theta_2 - \alpha)$$

$$(அ - அ) \cos(2\theta_1 - \alpha) + \cos \alpha = \cos(2\theta_2 - \alpha) + \cos \alpha \dots (4)$$

$$\therefore \cos(2\theta_1 - \alpha) = \cos(2\theta_2 - \alpha)$$

$$(அ - அ) 2\theta_1 - \alpha = -(2\theta_2 - \alpha) \quad [\because \theta_1 \neq \theta_2]$$

$$\therefore \theta_1 + \theta_2 = \alpha.$$

சமன்பாடு (2)-இலிருந்து

$$\begin{aligned} p &= 2a \cos \theta_1 \cos (\theta_1 - \theta_1 + \theta_2) \\ &= 2a \cos \theta_1 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

இதைச் சமன்பாடு (1)-இல் பிரதியிடுவர்,

$$r \cos (\theta - \theta_1 + \theta_2) = 2a \cos \theta_1 \cos \theta_2.$$

எனவே, நான்கின் சமன்பாடு

$$r \cos (\theta - \theta_1 - \theta_2) = 2a \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad \dots (5)$$

இஃது சமன்பாடு (5)-இல் $\theta_2 = \theta_1$ எனப் பிரதியிடுவர்,

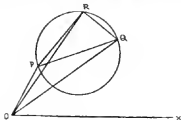
$$r \cos (\theta - 2\theta_1) = 2a \cos^2 \theta_1.$$

எனவே, (r_1, θ_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$r \cos (\theta - 2\theta_1) = 2a \cos^2 \theta_1.$$

மாநில 5: $P(r_1, \theta_1)$, $Q(r_2, \theta_2)$ புள்ளிகளைச் செல்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்டு வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

$R(r, \theta)$, பரிதியின் மீதுள்ள வரதேனும் ஒரு புள்ளி எனக் கொள்வோம்.



படம் 102

$$PR^2 = OP^2 + OR^2 - 2OP \cdot OR \cos \angle ROP$$

$$= r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos (\theta_1 - \theta)$$

$$\begin{aligned} QR^2 &= OR^2 + OQ^2 - 2OR \cdot OQ \cos \angle QOR \\ &= r^2 + r_1^2 - 2r_1r \cos(\theta - \theta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PQ^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos \angle QOP \\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned}$$

$$\therefore \angle PRQ = 90^\circ,$$

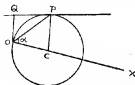
$$PQ^2 = PR^2 + QR^2,$$

$$\begin{aligned} \therefore r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ = r_1^2 + r_2^2 + 2r^2 - 2r[r_1 \cos(\theta - \theta_1) + r_2 \cos(\theta - \theta_2)], \end{aligned}$$

$$\therefore r^2 = r[r_1 \cos(\theta - \theta_1) + r_2 \cos(\theta - \theta_2)] - r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\text{(அது)} \quad r^2 - rr_1 \cos(\theta - \theta_1) - rr_2 \cos(\theta - \theta_2) + r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

மாதிரி 6 : $r = 2a \cos \theta$ வட்டத்தின் தொடுகோடுகளுக்கு முனைகளிலிருந்து வரையறுக்கப்பட்ட கோடுகள்தம் அடிப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.



படம் 108.

முனை O எனவும், தொடக்கக் கோடு OX எனவும் கொள்வோம்.

$P(R, \alpha)$ பரிதிவிக் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனில், P -இடத்துத் தொடுகோடு

$$r \cos(\theta - 2\alpha) = 2a \cos^2 \alpha \quad \dots \quad (1)$$

முனைவிலிருந்து தொடு கோட்டிக்கு வரைவுச் செய்துத் தொடு கோட்டின் குறுப் புள்ளி $Q(r_1, \theta_1)$ எனின்,

சமன்பாடு (1)-இன் வடிவிலிருந்து,

$$r_1 = OQ = 2a \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\angle XOQ = \theta_1 = 2\frac{\theta}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே, } r_1 &= 2a \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ &= a(1 + \cos \theta) \\ &= a(1 + \cos \theta_1). \end{aligned}$$

$$\therefore Q(r_1, \theta_1) \text{ புள்ளியின் இயக்கு வரீ } r = a(1 + \cos \theta)$$

பயிற்சி 10.1.

1. கீழ்க் காணும் சமன்பாடுகளைக் கோண தூர சமன்பாடுகளாக மாற்றுக.

(i) $y = x \tan \alpha$

(ii) $x^2 = y^2 + 2xy$

(iii) $x^2 + y^2 = 2ax$.

2. கீழ்க் காணும் சமன்பாடுகளைத் தேக்கோட்டின் சமன்பாடுகளாக மாற்றுக.

(i) $r = a \sin \theta$

(ii) $r = a \sin 2\theta$

(iii) $r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} = a^{\frac{1}{2}}$.

3. $(-3, 30^\circ)$, $(5, 150^\circ)$, $(7, 210^\circ)$ புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

4. $(2, 30^\circ)$, $(4, 120^\circ)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் நீளம் காண்க.

5. $(0, 0^\circ)$, $(3, 90^\circ)$, $(3, 30^\circ)$ புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணம் ஒரு சமபக்க முக்கோணம் என நிறவுக.

6. $r = 2a \cos \theta$ வட்டத்தின் மீதுள்ள $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \theta = \theta_3$ புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு மூனைவிடுத்து வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள் $r \cos (\theta - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) = 2a \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3$ என்ற கோட்டின் மீதமையும் என நிறுவுக.
7. λ துணையகரண எண்ணி, $r^2 - \lambda r \cos (\theta - \alpha) + \lambda p = 0$ எனும் சமன்பாடு பொது ஆச்ச வட்டங்களைக் குறிக்கும் என நிறுவுக.
8. $r = 2a \cos (\theta - \alpha)$ வட்டத்திற்கு 'ப' புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு காண்க.
9. $r = r_1 \cos (\theta - \alpha), r = r_2$ வட்டங்கள் செங்கோணத்தின் துண்டில் வெட்டும் என நிறுவுக.
10. $r^2 \cos \theta - ar \cos 2\theta - 2a^2 \cos \theta = 0$ எனும் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தையும், ஒரு தேர்க்கோட்டையும் குறிக்கும் என நிறுவுக.
11. $\frac{1}{r} = a \cos \theta + b \sin \theta$ எனும் கோடு, $r = 2a \cos \theta$ வட்டத்திற்குத் தொடுகோட்டாக அமைவத் தேவைவரவள கட்டுப்பாடு காண்க.
12. $(2, 90^\circ), (8, 30^\circ)$ புள்ளிகளைச் செரிக்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

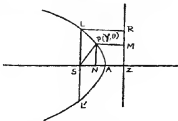
$$r^3 - r[2 \cos (\theta - 90) + 8 \cos (\theta - 30)] + 8\sqrt{3} = 0$$
 என நிறுவுக.

விடைகள்

1. (i) $\theta = \alpha$; (ii) $r \cos 2\theta = 2a \sin \theta$; (iii) $r = 2a \cos \theta$.
2. (i) $x^2 + y^2 = a^2$; (ii) $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2 x^2 y^2$;
 (iii) $y^2 + 4ax = 4a^2$.
3. $\frac{7\sqrt{3}}{8}$. 4. $2\sqrt{5}$. 11. $b^2 d^2 + 2ad = 1$.

10-10. கூம்பு வளைவின் கோண தூர் சமன்பாடு

முனியம் S , இயக்கு வரை ZM கொண்ட கூம்பு வளைவின் மையத் தொலை விலிதம் e எனக் கொள்வோம். S புள்ளியிலிருந்து இயக்கு வரைக்கு SZ என்ற செங்குத்துக் கோடு வரையவும்.



படம் 104.

S புள்ளியை மூலவாகவும், SZ -ஐ தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்வோம். $P(r, 0)$ கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனில்,

$$SP = r, \angle ZSP = \theta$$

P புள்ளியிலிருந்து SZ -க்கு PN என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைவ. LSL' கூம்பு வளைவின் செங்குத்துக் கோடு $LSL' = 90^\circ$ என்பதாம். L புள்ளியிலிருந்து இயக்கு வரைக்குச் செங்குத்தாக LR கோடு வரையவும்.

கூம்பு வளைவின் வரையறைப்படி,

$$SL = e.LR = e.SZ$$

$$SP = e.PM = e.NZ$$

$$(அ - 2) \quad SZ = \frac{SL}{e} = \frac{l}{e} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$r = SP = e.NZ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore r = e.NZ = e(SZ - SN)$$

$$= e \left[\frac{l}{e} - r \cos \theta \right]$$

$$\text{(அ-து)} \quad r = l - er \cos \theta$$

$$\therefore r [1 + e \cos \theta] = l$$

$$\text{(அ-து)} \quad \frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta.$$

கிளை 1: SZ-க்குப் பதிக தொடக்கக் கோட்டை ZS வழி எடுத்துக் கொண்டால் $\angle ASP = \pi - \theta$ ஆகும்.

\therefore கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta.$$

கிளை 2: கூம்பு வளைவின் ஆச்சு, தொடக்கக் கோட்டுடன் சிறப்பிக்கும் கோணம் ϕ எனின், SP என்ற கோடு ஆச்சுடன் $(\theta - \phi)$ கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும். எனவே, கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + e \cos(\theta - \phi)$.

கிளை 3: மையத்தொலைவிலிருந்து e ஒன்றுக்குச் சமமாகவோ குறைவாகவோ, அதிகமாகவோ இருப்பின், கூம்புவளைவு முறையே ஒரு பரவளைவு, நீள் வட்டம் அல்லது, அதிபரவளைவைக் குறிக்கும்.

$e = 1$ எனின், கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

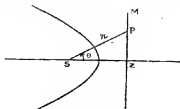
$$\therefore \text{பரவளைவின் சமன்பாடு} \quad r = \frac{l}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2}.$$

10-11. கூம்பு வளைவின் இயக்கு வரை

குவியம் S-ஐ முனைவாகவும், SZ-ஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்ளோம். ZM ஒத்த இயக்குவரையின்மீது $P(r, \theta)$ வரையையும் ஒரு புள்ளி எனக்கொள்ளோம்.

ப. வ. - 80.

$$\therefore SP = r, \angle ZSP = \theta.$$



படம் 105

$$SZ = SP \cos \theta$$

$$(அ - ஆ) \frac{1}{e} = r \cos \theta.$$

$$\therefore \text{இயக்கு வரையின் சமன்பாடு } \frac{1}{r} = e \cos \theta.$$

$$\text{கிடை : } \frac{1}{r} = 1 + e \cos (\theta - \alpha) \text{ என்ற கூம்பு வளைவில்}$$

$$\text{குவியல் S-இன் ஒத்த இயக்கு வரை } \frac{1}{r} = e \cos (\theta - \alpha) \text{ ஆகும்.}$$

$$10.12. \frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta \text{ கூம்பு வளைவு வரைதல்}$$

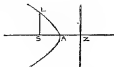
வகை (i) $e = 0$ எனில், சமன்பாடு $r = l$ என்கிறோம். எனவே, கூம்பு வளைவு ஒரு வட்டமாகும். முனைவு இதன் மையமாகும். இதன் ஆரம் l .

வகை (ii) $e = 1$ எனில், சமன்பாடு $\frac{1}{r} = 1 + \cos \theta$. எனவே, கூம்பு வளைவு வரையறைப்படி ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும்.

$$\theta = 0 \text{ எனில், } \frac{1}{r} = 1 + 1 = 2. \therefore r = \frac{l}{2}.$$

பரவளைவு அதன் அச்சை (தொடக்கக் கோடு) வெட்டும் புள்ளி $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ ஆகும். θ -வின் மதிப்புப் பூச்சியத்திலிருந்து

ஆதிக்கிக்கும்போது $(1 + \cos \theta)$ -வின் மதிப்புக் குறைகிறது. எனவே, r -இன் மதிப்பு ஆதிக்கிக்கும். θ -வின் மதிப்பு π -ஐ தொங்கும்போது, r -இன் மதிப்புக் கத்தழிவை (infinity) தொங்கும். θ -வின் மதிப்பு π -க்கு மேலும் ஆதிக்கிக்கும்போது $(1 + \cos \theta)$ -வின் மதிப்பு ஆதிக்கித்து, r -இன் மதிப்புத் தொடர்ந்து குறைத்து கொண்டே வந்து, $\theta = 2\pi$ என்ற மதிப்புக்கு $r = \frac{l}{2}$ என்ற மதிப்பை மீண்டும் பெறுகிறது. எனவே, பரவளைவு தொடக்கக்கோட்டுடன் சமச்சீர் பெற்றிருக்கும் பரவளைவின் வடிவம் படத்திலுள்ளது போலிருக்கும்.



படம் 106

வகை (ii) $0 < e < 1$ எனின், வரையறைநின்படி, கூம்பு வளைவு தீள்வட்டமாகும்.

$$\theta = 0 \text{ எனின், } \frac{l}{r} = 1 + e$$

$$\therefore r = \frac{l}{1+e}$$

$\cos \theta$ -வின் மீற்பெரு மதிப்பு 1 ஆதலின் $\frac{l}{r}$ -இன் மீற்பெரு மதிப்பு $(1+e)$ ஆகும். எனவே, r -இன் மீச்சிறு மதிப்பு $\frac{l}{1+e}$ ஆகும்.

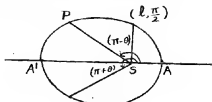
$$\theta = \pi \text{ எனின், } \frac{l}{r} = 1 - e.$$

$$\therefore r = \frac{l}{1-e}$$

$\cos \theta$ -வின் மீத சிறு மதிப்பு -1 ஆதலின், $\frac{l}{r}$ -இன் மீதச் சிறு மதிப்பு $(1-e)$. எனவே, r -இன் மீப்பெரு மதிப்பு $\frac{l}{1-e}$. r -இன் மதிப்பு $\frac{l}{1+e}$ -இலிருந்து $\frac{l}{1-e}$ -க்குத் தொடர்ந்து அதிகரிக்கும். தன் வட்டம் அச்சை (தொடக்கக் கோடு) $A\left(-\frac{l}{1+e}, 0\right)$, $A'\left(\frac{l}{1-e}, \pi\right)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

θ -வின் மதிப்பு π -யிலிருந்து தொடர்ந்து 2π -க்கு அதிகரிக்கும் போது r -இன் மதிப்பு $\frac{l}{1-e}$ -யிலிருந்து தொடர்ந்து $\frac{l}{1+e}$ -க்குக் குறையும். $\theta = \frac{\pi}{2}$ (அ-து) $\frac{3\pi}{2}$ எனின், $r = l$ ஆகும்.

மேலும், $\cos \theta = \cos(2\pi - \theta)$ ஆதலின், தன் வட்டம் தொடக்கக் கோட்டுடன் சமச் சீத் பெற்றிருக்கும். தன் வட்டத்தின் வடிவம் படத்திலிருப்பது போலிருக்கும்.



படம் 107.

எனக் (iv) $e > 1$ எனின், வரையறைகளில் வடிவ வளிவு அதிபரவழிவாகும்.

$$\theta = 0 \text{ எனின், } \frac{l}{r} = 1 + e$$

$$\therefore r = \frac{l}{1+e}$$

$$\text{படத்தில் } r = SA = \frac{l}{1+e}.$$

θ அதிகரித்து $\cos \theta$ -வின் மதிப்புக் குறையும்போது r -இன் மதிப்பு $1+e \cos \theta = 0$ என்ற அதிகரிக்கும், $\frac{\pi}{2}$ -க்கும், π -க்கும் இடைப் படத்து திற்றும் θ -வின் ஒரு மதிப்புக்கு (இதை μ என்க) $1+e \cos \theta = 0$ ஆகும். படத்தில் இம்மதிப்பு $= \angle ASP$ ஆகும்.

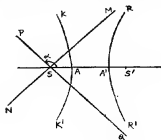
$$\therefore r = \frac{l}{1+e \cos \theta} = \frac{l}{0} = \infty$$

$\theta = \mu$ எனின், r -இன் மதிப்புக் கத்துறியாரும். θ -வின் இம் மதிப்புக்கள் படத்தில் AP என்ற பகுதியைக் குறிக்கும்.

θ -வின் மதிப்பு μ -ஐக் கடந்து அதிகரிக்கும்போது r குறைவெண் மதிப்புக் (negative value) கொண்டிருக்கும். θ -வின் மதிப்பு μ -விலிருந்து π -க்குத் தொடர்ந்து அதிகரிக்கும்போது r -இன் எண்ணளவு தொடர்ந்து குறையும். இவ் விடைவெளியில் r குறைவெண் மதிப்புக் கொண்டிருக்கும்.

$$\theta = \pi \text{ எனின், } r = \frac{l}{1-e} = -\frac{l}{e-1}.$$

∴ θ -வின் இம்மதிப்புக்கள் படத்தில் QA' பகுதியைக் குறிக்கும்.



படம் 105

6-வின் எதிர்பு π -விலிருந்து $(2\pi - \alpha)$ -க்கு அதிகரிக்கும்போது படத்தில் $M'A'$ பகுதியும், $(2\pi - \alpha)$ -விலிருந்து 2π -க்கு அதிகரிக்கும்போது NA என்ற பகுதியும் கிடைக்கப்பெறும்.

எனவே, படம் வரையும் போது முதலில் AKP என்ற பகுதி, பின் $QR'A'$ என்ற பகுதி, அதற்குப் பிறகு $A'MR$ பகுதி, கடைசியில் $NK'A$ பகுதி கிடைக்கப் பெறும். ஆதிபரவளைவு படத்தில் காட்டியுள்ளபடி இது பகுதிகளைப் பெற்றிருக்கும்.

சமீப்தி 7 : $\frac{R}{r} = 2 + \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$ என்ற கூம்பு வளைவு வரைக.

$$\frac{R}{r} = 2 + \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$$

$$\therefore \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$$

$$= 1 + \cos \frac{\pi}{3} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{3} \sin \theta$$

$$= 1 + \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(அ - து) \quad \frac{1}{r} = 1 + \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right).$$

இது $\frac{1}{r} = 1 + e \cos (\theta - \alpha)$ வடிவிலுள்ளது. எனவே, கூம்பு வளைவின் குவியல் முக்கவாகும். மேலும், கூம்பு வளைவின் அச்ச, தொடக்கக் கோட்டுடன் 60° -இல் சாய்வு கொண்டிருக்கும். $e = 1$ ஆதலின், கூம்பு வளைவு பரவளைவாகும்.

செவ்வகத்தில் நீளம் $= 2 \times 1 = 2$.

பரவளைவின் முனைவு A எனின், $AS = \frac{1}{2}$. L, L' என்பவை செவ்வகத்தில் நுனிகளெனின் $SL = SL' = 1$.

$$\theta = 0 \text{ எனில், } \frac{1}{r} = 1 + \cos 60 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore r = \frac{2}{3},$$

$$\theta = \pi \text{ எனில், } \frac{1}{r} = 1 + \cos(180 - 60)$$

$$\therefore \frac{1}{r} = 1 - \cos 60$$

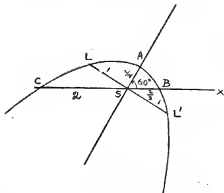
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad r = 2.$$

எனவே, பரவளைவு தொடக்கக் கோட்டை B, C புள்ளிகளில் சந்திப்பிற்,

$$SB = \frac{2}{3}, \quad SC = 2.$$

பரவளைவின் மடம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



மாதிரி 8: $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$, $\frac{l}{r} = -1 + e \cos \theta$ என்ற இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே கூம்பு வளைவைக் குறிக்கும் என நிறுவுக.

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாடு குறிக்கும் கூம்பு வளைவின் மீது $P(r, \theta)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக்கொள்வோம்.

P புள்ளியின் கோண தூரக்கூறுகளை $(-r, \pi + \theta)$ என எழுதலாம்.

\therefore சமன்பாடு (1)-இல் $r = -r$, $\theta = \pi + \theta$ எனப் பிரதிபிடிச், $\frac{l}{-r} = 1 + e \cos(180^\circ + \theta)$ என்றாகும்.

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{l}{-r} = 1 - e \cos \theta$$

$$\therefore \frac{l}{-r} = -1 + e \cos \theta \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

எனவே, சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கூம்பு வளைவைக் குறிக்கும்.

10-13. கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள இருபுள்ளிகளைச் சேர்க்கும் தாளின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்ற கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள P , Q என்ற எவையெனும் இரு புள்ளிகளின் ஆரைக் கோணங்கள் α , β எனக் கொள்வோம்.

எனவே, அப் புள்ளிகளின் கோண தூரக் கூறுகள்,

$$P\left(\frac{l}{1+e \cos \alpha}, \alpha\right), Q\left(\frac{l}{1+e \cos \beta}, \beta\right).$$

PQ என்ற தாளிக் சமன்பாடு

$$A \cos \theta + B \sin \theta = \frac{l}{r} \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

எனக் கொள்வதால், P , Q பின்னிகளும் சமன்பாடு (2)-இல் பொருத்தும்.

$$\therefore 1 + e \cos \alpha = A \cos \alpha + B \sin \alpha \quad \dots \quad (8)$$

$$1 + e \cos \beta = A \cos \beta + B \sin \beta \quad \dots \quad (4)$$

$$(\text{அ-ஆ}) \quad 1 = (A-e) \cos \alpha + B \sin \alpha \quad \dots \quad (5)$$

$$1 = (A-e) \cos \beta + B \sin \beta \quad \dots \quad (6)$$

[(5) $\times \sin \beta$ - (6) $\times \sin \alpha$] எனின்,

$$\begin{aligned} \sin \beta - \sin \alpha &= (A-e) [\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta] \\ &= -(A-e) \sin (\alpha - \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{அ} - \text{ஆ}) &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &= -2(A-e) \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore (A-e) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$\therefore A = e + \sec \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

இவ்வாறே, [(6) $\times \cos \beta$ - (5) $\times \cos \alpha$] எனின்,

$$B = \sec \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

A , B -களின் மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (2)-இல் பிரதியிடுவர்,

$$\frac{l}{r} = \left(e + \sec \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \theta + \sec \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \theta$$

$$\begin{aligned} (\text{அ-ஆ}) \quad \frac{l}{r} &= e \cos \theta + \sec \frac{\alpha - \beta}{2} \left[\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \theta \right] \end{aligned}$$

$$= e \cos \theta + \sec \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

எனவே, நான் PQ -வின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} e = \cos \theta + \sec \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

கிளை 1 : கூம்புவளைவின் சமன்பாடு

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos (\theta - \gamma)$ எனில், α, β புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாளின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos (\theta - \gamma) + \sec \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

கிளை 2 : $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள $(\alpha - \beta), (\alpha + \beta)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாளின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \sec \beta \cos (\theta - \alpha).$$

10.14. α புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்ற கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள ' α ', ' β ' புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாளின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \sec \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \quad \dots (2)$$

' β ' புள்ளி ' α ' புள்ளியைத் தொகுதி மூலதில் ஆதாரடன் பொருத்தும்போது அப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நான் ' α ' புள்ளி விடத்துத் தொடுகோடாகும்.

எனவே, சமன்பாடு (2)-இல், $\beta = \alpha$ எனப் பிரதியிடுவர்,

$$\begin{aligned} \frac{l}{r} &= e \cos \theta + \sec 0 \cos (\theta - \alpha) \\ &= e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha). \end{aligned}$$

\therefore ' α ' புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha).$$

இதில் : $\frac{l}{r} = 1 + e \cos (\theta - \gamma)$ கூம்பு வரையுக்கு α புள்ளி
 விடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e \cos (\theta - \gamma) + \cos (\theta - \alpha).$$

19.15. தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$$\text{கூம்பு வரையு } \frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \dots \quad (1)$$

$P(\alpha)$ புள்ளிவிடத்துத் தொடு கோடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \quad \dots \quad (2)$$

$Q(\beta)$ புள்ளிவிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \beta) \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3)-இன் தீர்வுகள் இரு தொடு கோடுகள்
 வெட்டும் புள்ளியின் கோண தூரக் கூறுகளாம்.

(2)-இலிருந்து (3)-ஐக் கழிப்பின்,

$$\cos (\theta - \alpha) = \cos (\theta - \beta)$$

$$\therefore \theta - \alpha = \pm (\theta - \beta).$$

$\theta - \alpha = \theta - \beta$ எனின்,

$$\alpha = \beta \text{ ஆனால், } \alpha \neq \beta.$$

$$\therefore \theta - \alpha = -(\theta - \beta)$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad 2\theta = \alpha + \beta \quad (\text{அ} - \text{து}) \quad \theta = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \dots \quad (4)$$

θ -எனின் மதிப்பை (2) இல் பிரதியிடுக.

$$\begin{aligned} \frac{l}{r} &= e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha \right) \\ &= e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

$$\therefore r = \frac{l}{e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \quad \dots \quad (5)$$

இங் : தொடுகோடுகள் வெட்டுத் புள்ளி R எனவும், குவியம் S எனவும் கொண்டால், SR கோடு $\perp PSQ$ -ஐ இரு சமக் கூறும்.

10-16. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவின் தொலைத் தொடு கோடுகள்

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவுக்கு α புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \quad \dots \quad (1)$$

தொடு புள்ளி ' α ' கூம்பு வளைவின்மீது கத்தறியினிருக்கு வெவின், சமன்பாடு (1) தொலைத் தொடு கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore 1 + e \cos \alpha = 0 \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-இனிருத்து ' α '-ஐ நீக்க, தொலைத் கோடுகளின் சமன்பாடு கிடைக்கப் பெறும்.

$$(2)\text{-இனிருத்து } \cos \alpha = -\frac{1}{e}. \quad \therefore \alpha = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{e} \right).$$

α -வின் மதிப்பை (1)-இல் பிரதியிடுவர்,

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos \left[\theta - \cos^{-1} \left(-\frac{1}{e} \right) \right].$$

$\cos^{-1} \left(-\frac{1}{e} \right)$ -க்கு 0, 2π என்ற கோண இடைவெளியில் இரு மதிப்புகள் உள்ளதால், இரு தொலைத் தொடுகோடுகள் உண்டு.

10-17. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவுக்கு ' α ' புள்ளியிடத்துத் செங்கோடு

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவுக்கு ' α ' புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos(\theta - \alpha) \quad \dots \quad (1)$$

∴ தொடு கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய்ச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{K}{r} = e \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

[பத்தி 7, கிளை 2]

$$(அ - து) \quad \frac{K}{r} = -e \sin \theta - \sin(\theta - \alpha) \quad \dots \quad (2)$$

இக்கோடு 'α' புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

$$(அ - து) \quad \left(\frac{l}{1 + e \cos \alpha}, \alpha \right) \text{ புள்ளி வழிச் செல்லும்.}$$

$$\therefore \quad \frac{K(1 + e \cos \theta)}{l} = -e \sin \alpha - \sin(\alpha - \alpha)$$

$$\therefore \quad K = -\frac{le \sin \alpha}{1 + e \cos \alpha}$$

K-இன் மதிப்பை (2) இல் பிரதியிடுவர்,

$$-\frac{le \sin \alpha}{r(1 + e \cos \alpha)} = -e \sin \theta - \sin(\theta - \alpha).$$

$$(அ - து) \quad \frac{l}{r} \cdot \frac{e \sin \alpha}{1 + e \cos \alpha} = e \sin \theta + \sin(\theta - \alpha).$$

எனவே, 'α' புள்ளியிலிருந்து செங்கோடு

$$\frac{e \sin \alpha}{1 + e \cos \alpha} \cdot \frac{l}{r} = e \sin \theta + \sin(\theta - \alpha).$$

10-18. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூடிய வளைவின் குத்துத் தொடுகோடு வட்டம் (Director Circle)

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \text{ கூடிய வளைவுக்கு 'α' புள்ளியிலிருந்து.}$$

தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \quad \dots \quad (1)$$

‘β’ புள்ளியீடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \beta) \quad \dots \quad (2)$$

இவ்விறு தொடுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளி (r_1 , θ_1) எனின்,

$$r_1 = \frac{l}{e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \quad \dots \quad (3)$$

$$\theta_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \dots \quad (4)$$

[பத்தி 15-சமன்பாடுகள் (4), (5)]

சமன்பாடு (1)-ஐப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$$

$$(\text{அ-அ}) \quad (e + \cos \alpha) \cos \theta + \sin \theta \sin \alpha - \frac{l}{r} = 0.$$

எனவே, தொடுகோடு (1)-இன் சரிவு

$$= -\frac{e + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

இவ்வாறே தொடுகோடு (2)-இன் சரிவு

$$= -\frac{e + \cos \beta}{\sin \beta}$$

தொடுகோடுகள் தம்மன் செங்குத்தாய் வெட்டுமெனின், வெட்டும் புள்ளியின் இவ்வுரு, வழிக்குத்துத் தொடுகோடு வட்டமாகும்.

எனவே, தொடுகோடுகள் (1), (2) தம்மன் செங்குத்தாய் வெட்டுமெனின்,

$$\left(-\frac{e + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \left(-\frac{e + \cos \beta}{\sin \beta} \right) = -1.$$

$$\therefore \left(\frac{e + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \left(\frac{e + \cos \beta}{\sin \beta} \right) = -1$$

$$(அ - 2) (e + \cos \alpha)(e + \cos \beta) + \sin \alpha \sin \beta = 0$$

$$\therefore e^2 + e(\cos \alpha + \cos \beta) + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 0$$

$$(அ - 2) e^2 + e \left(2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

$$e^2 + 2e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \left(2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 1 \right) = 0$$

$$e^2 + 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left[e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right] - 1 = 0$$

... (7)

சமன்பாடுகள் (8), (4), (7)-இலிருந்து α -ஐ நீக்க, குத்துத் தொடுகோடு வட்டம் கிடைக்கப் பெறும்.

சமன்பாடு (8)-இலிருந்து

$$\frac{l}{r_1} = e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \dots \quad (8)$$

இதில் சமன்பாடு (4)-இல் $\frac{\alpha + \beta}{2} = \theta_1$ -ஐப் பிரதியிடுவர்,

$$\frac{l}{r_1} = e \cos \theta_1 + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\therefore \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1.$$

$\frac{\alpha + \beta}{2}$, $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ மதிப்புகளை (7)-இல் பிரதியிடுவர்,

$$e^2 + 2 \left[\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right] \left[e \cos \theta_1 + \frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right] - 1 = 0$$

$$(அ-து) \quad e^2 + 2e \cos \theta_1 \left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right) + 2 \left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right)^2 - 1 = 0,$$

$$\therefore \quad e^2 r_1^2 + 2r_1 e \cos \theta_1 (l - r_1 e \cos \theta_1) + 2(l - e r_1 \cos \theta_1)^2 - r_1^2 = 0.$$

$$(அ-து) \quad e^2 r_1^2 + 2r_1 e l \cos \theta_1 - 2r_1 e^2 \cos^2 \theta_1 + 2l^2 - 4l e r_1 \cos \theta_1 + 2e^2 r_1^2 \cos^2 \theta_1 - r_1^2 = 0$$

$$(அ-து) \quad e^2 r_1^2 - 2l e r_1 \cos \theta_1 + 2l^2 - r_1^2 = 0.$$

$$\therefore \quad r_1^2 (e^2 - 1) - 2r_1 e l \cos \theta_1 + 2l^2 = 0.$$

எனவே, குத்துத் தொடுகோடு வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2 (e^2 - 1) - 2l e r \cos \theta + 2l^2 = 0.$$

பரவளினம் $e = 1$.

எனவே, அதன் குத்துத் தொடுகோடு வட்டம்

$$= 2l r \cos \theta + 2l^2 = 0$$

$$(அ-து) \quad \frac{l}{r} = \cos \theta.$$

இது பரவளினம் இயக்குவரைவாகும்.

மாதிசீடு : PP' , QQ' என்பவை கூம்பு வளைவு ஒன்றின் குவிப நாண்களாக, இவைகள் நம்முள் செங்குத்தாகப் வெட்டு

கொள்ள, $\frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} =$ மாநிலி என நிறுவுக.

$$\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

ஒரு கூம்பு வளைவு எனக் கொள்வோம்.

P புள்ளியின் ஆதரக்கோணம் α எனில், P' , Q , Q' புள்ளிகளின் ஆதரக்கோணங்கள் முறையே $\alpha + \pi$, $\alpha + \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \frac{3\pi}{2}$ ஆகும்.

குவிமம் S எனின்,

$$SP = \frac{l}{1+e \cos \alpha}, \quad SP' = \frac{l}{1-e \cos \alpha},$$

$$SQ = \frac{l}{1-e \sin \alpha}, \quad SQ' = \frac{l}{1+e \sin \alpha},$$

$$\begin{aligned} \therefore PP' &= SP + SP' = \frac{(l-e \cos \alpha) + (l+e \cos \alpha)}{1-e^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{2l}{1-e^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

$$QQ' = SQ + SQ' = \frac{2l}{1-e^2 \sin^2 \alpha}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} &= \frac{1-e^2 \cos^2 \alpha}{2l} + \frac{1-e^2 \sin^2 \alpha}{2l} \\ &= \frac{(1-e^2 \cos^2 \alpha) + (1-e^2 \sin^2 \alpha)}{2l} \\ &= \frac{2-e^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{2l} = \frac{2-e^2}{2l} = \text{மாதிர்.} \end{aligned}$$

மாதிரி 10 : குவிமத்தில் செங்கோணத்தை ஏதற்கும் ஒரு செவ்வக அதிபரவளையின் தாண்டல் நிலைத்த பரவளையு ஒன்றைத் தொடும் என நிறுவுக.

செவ்வக அதிபரவளையின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + \sqrt{2} \cos \theta, \quad [\because e = \sqrt{2}].$$

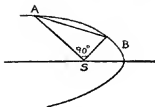
தாண்டி AB குவிமம் S -ஆல் தாங்கும் கோணம் 90° எனக் கொள்வோம்.

A, B புள்ளிகளின் ஆரைக்கோணங்கள் $(\alpha + \beta)$, $(\alpha - \beta)$ எனின்,

$$\angle ASB = (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) = 2\beta.$$

$$\angle ASB = 90^\circ \text{ எனின், } \beta = 45^\circ.$$

ப. வ. - 31.



படம் 110

AB-வின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} \frac{l}{r} &= \sqrt{2} \cos \theta + \sec \beta \cos (\theta - \alpha) \\ &= \sqrt{2} \cos \theta + \sec 45^\circ \cos (\theta - \alpha) \\ &= \sqrt{2} \cos \theta + \sqrt{2} \cos (\theta - \alpha). \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{l}{r\sqrt{2}} = \cos \theta + \cos (\theta - \alpha)$$

எனவே, AB என்ற கோடு $\frac{l}{r\sqrt{2}} = 1 + \cos \theta$ என்ற பர வளைவை 'α' புள்ளியில் தொடுக.

மாதிரி 11: $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ என்ற கோடு $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ என்ற கூம்பு வளைவைத் தொடுவதற்குத் தேவையான கூட்டுப்பாடு $(A-e)^2 + B^2 = 1$ என நிறுவுக.

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \text{ என்ற கூம்பு வளைவுக்குத் தொடுகோடு}$$

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha)$$

$$= e \cos \theta + \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha.$$

$$\therefore \frac{l}{r} = (e + \cos \alpha) \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta \quad \dots \quad (2)$$

தொடு கோட்டினிற், சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad I = \frac{e + \cos \alpha}{A} = \frac{\sin \alpha}{B}$$

$$(அ - து) \quad A = e + \cos \alpha \quad \dots \quad (3)$$

$$B = \sin \alpha \quad \dots \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4)-இலிருந்து α -ஐ நீக்கினால் தேவையான கட்டுப்பாடு கிடைக்கும்.

$$(3)\text{-இலிருந்து } \cos \alpha = A - e.$$

$$\therefore \quad I = \cos^2 + \sin^2 \alpha = (A - e)^2 + B^2.$$

எனவே, தேவையான கட்டுப்பாடு

$$(A - e)^2 + B^2 = 1.$$

10-19. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவுக்கு (r_1, θ_1) புள்ளி விளக்குந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் தொகுதான்

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ எனும் கூம்பு வளைவுக்கு (r_1, θ_1) புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகள் கூம்பு வளைவைத் தொடும் புள்ளிகள் Q, R எனவும், இப் புள்ளிகளின் ஆரக் கோணங்களின் α, β எனவும் கொள்வோம்.

\therefore தான் Q, R-இன் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = \sec \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + e \cos \theta \quad (1)$$

' α ', ' β ' புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha),$$

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \beta).$$

இத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் கோண தூரக் கூறுகள்

$$\left(\frac{l}{e \cos \frac{\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}, \frac{\alpha+\beta}{2} \right).$$

$$\therefore r_1 = \frac{l}{e \cos \frac{\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}. \quad (2)$$

$$\theta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \dots \quad (3)$$

$$(2)\text{-இலிருந்து, } \frac{l}{r_1} = e \cos \frac{\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(அ-அ) \quad \frac{l}{r_1} - e \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = \cos \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$(3)\text{-இலிருந்து } \theta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

எனவே, சமன்பாடு (1),

$$\frac{l}{r} = \sec \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \left(\theta - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) + e \cos \theta$$

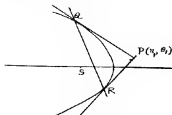
$$= \frac{\cos (\theta - \theta_1)}{\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1} + e \cos \theta$$

$$(அ-அ) \quad \frac{l}{r} - e \cos \theta = \frac{\cos (\theta - \theta_1)}{\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1}.$$

$$\therefore \left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right) \left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right) = \cos (\theta - \theta_1).$$

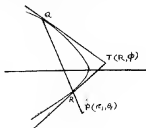
எனவே, தொடுதளவின் சமன்பாடு

$$\left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right) \left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right) = \cos (\theta - \theta_1).$$



படம் 111.

10-20. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ ஆகிய வளைவைச் சார்ந்து (r_1, θ_1) புள்ளியின் இடைச்சேரி



படம் 112.

$P(r_1, \theta_1)$ என்ற குறித்த புள்ளி வழிச் செல்லும் தாள்களில் ஒன்று QR எனக் கொள்வோம். Q, R புள்ளிகளிடத்து வரையும் தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $T(R, \phi)$ எனின், T -யின் இடங்கு வழி P -யின் இரைக் கோடாகும்.

Q, R புள்ளிகளின் ஆதாரக் கோணங்கள் முறையே α, β எனின், T புள்ளியின் கூறுகள்

$$R = \frac{l}{e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \quad \dots \quad (1)$$

$$\phi = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \dots \quad (2)$$

தான் QR -இன் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = \sec \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + e \cos \theta.$$

இது $P(r_1, \theta_1)$ வழிச் செல்லின்,

$$\frac{l}{r_1} = \sec \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \left(\theta_1 - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + e \cos \theta_1$$

$$(அ-ஆ) \quad \frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 = \frac{\cos \left(\theta_1 - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-இரிலுந்து

$$R = \frac{l}{e \cos \phi + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$(அ-ஆ) \quad \frac{l}{R} = e \cos \phi + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\frac{l}{R} - e \cos \phi = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \dots \quad (4)$$

(3)-இலிருந்து ϕ -யின் மதிப்பையும், (4)-இலிருந்து $\cos \frac{\alpha-\beta}{2}$ மதிப்பையும் (3)-இல் பிரதிநிதி,

$$\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 = \frac{\cos (\theta_1 - \phi)}{\left(\frac{l}{R} - e \cos \phi \right)},$$

$$\therefore \left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right) \left(\frac{l}{R} - e \cos \phi \right) = \cos (\theta_1 - \phi).$$

எனவே, (R, ϕ) -யின் இயங்குவழி, அதாவது $P(r_1, \theta_1)$ -இன் இணைக்கோடு

$$\left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right) \left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right) = \cos (\theta - \theta_1).$$

10-21. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவின் துணைவட்டம்

கூம்பு வளைவின் தொடுகோட்டிற்குக் குவியத்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக்கோட்டின் அடிப்புள்ளியின் இயங்குவழி கூம்பு வளைவின் துணைவட்டமாகும் (auxiliary circle).

$$\text{கூம்பு வளைவு } \frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \dots \quad (1)$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \quad \dots \quad (2)$$

தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} &= e \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta - \alpha \right) \\ &= -e \sin \theta - \sin (\theta - \alpha). \end{aligned}$$

$$(அ-து) \quad R = -re \sin \theta - r \sin (\theta - \alpha).$$

இது குவியம் (குவியவு) வழிச் செலவின்,

$$R = 0.$$

எனவே, குவியவு வழிச் செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\sin (\theta - \alpha) = -e \sin \theta \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$(2)\text{-இலிருந்து, } \frac{l}{r} - e \cos \theta = \cos(\theta - \alpha) \quad \dots (4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4)-ஐ வர்க்கப் படுத்திக் கூட்டி,

$$e^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right)^2 = \sin^2(\theta - \alpha) + \cos^2(\theta - \alpha) = 1$$

$$(அ-து) \quad e^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \frac{2le}{r} \cos \theta + \frac{l^2}{r^2} - 1 = 0.$$

$$\therefore \quad r^2 e^2 - 2ler \cos \theta + l^2 - r^2 = 0.$$

$$\therefore \quad r^2 (e^2 - 1) - 2ler \cos \theta + l^2 = 0.$$

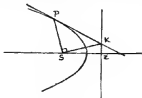
எனவே, துணை வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2 (e^2 - 1) - 2ler \cos \theta + l^2 = 0.$$

பரவளையில் $e = 1$. எனவே, அதன் துணை வட்டம் $- 2lr \cos \theta + l^2 = 0$ (அ-து) $\frac{l}{r} = 2 \cos \theta$.

இது பரவளைவுக்கு முனைவிடத்துத் தொடு கோடாகும்.

10-22. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ நுழை அனைவுக்கு P புள்ளியிலிருந்துத் தொடுகோடு இயக்குவனையை K புள்ளியில் வெட்டினால் $\angle KSP$ ஒரு செங்கோணமாம்



படம் 118.

முனைவு S எனவும், தொடக்கக் கோடு SZ , இயக்கு வரை KZ எனவும் கொள்வோம்.

P புள்ளியின் கோண ஹரக் கூறுகள் (r_1, θ_1) எனில், $SP = r_1$, $\angle ZSP = \theta_1$.

P புள்ளியிடத்துத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos(\theta - \theta_1) \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{இயக்குவரையின் சமன்பாடு } \frac{l}{r} = e \cos \theta \quad \dots \quad (2)$$

இயக்கு வரையும் தொடுகோடும் வெட்டும் புள்ளி K எனில், K -யின் கோண ஹரக் கூறுகள், சமன்பாடுகள் (1), (2)-இல் தீர்க்கப்படும்.

சமன்பாடுகள் (1) (2)-இனிகூற்று

$$\cos(\theta - \theta_1) = 0$$

$$\therefore \theta - \theta_1 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

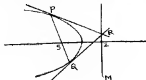
எனவே, K புள்ளியின் ஆளரங்கோணம் $\theta_1 \pm \frac{\pi}{2}$.

$$\angle KSP = ZSP - \angle ZSK$$

$$= \theta_1 - \left(\theta_1 \pm \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \pm \frac{\pi}{2}.$$

10-23. குவிய நான்களின் துணிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் தம் வெட்டும் புள்ளிகளின் இயங்குமதி ஓத்த இயக்கு வரையாகும்.



கூடிய வளைவில் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

குவிமம் (அ-து) முனைவு S , தொடக்கக் கோடு SZ . ஒத்த இயக்கு வரை ZM எனக் கொள்வோம்.

PQ ஒரு குவிவ நாண் எனவும், P , Q புள்ளிகளின் ஆரைக் கோணங்கள் α , β எனவும் கொள்வோம்.

P புள்ளியிலுத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

Q புள்ளியிலுத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \beta) \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

கோடுகள் (2), (3) கெட்டுப் புள்ளி $R(r_1, \theta_1)$ எனின்,

$$r_1 = \frac{l}{e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

[பத்தி 15-சமன்பாடுகள் (4), (5)].

$$\theta_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

P , Q புள்ளிகள் குவிவநாளின் துணிகளாதனின், P -யின் ஆரைக்கோணம் α எனின், Q -யின் ஆரைக்கோணம் $(\pi + \alpha)$ ஆகும்.

$$\therefore \beta = \pi + \alpha \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

$$(4)\text{-இலிருந்து, } \frac{l}{r_1} = e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$= e \cos \theta_1 + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \left[\because \theta_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} \right]$$

$$= e \cos \theta_1 + \cos \frac{\alpha - (\pi + \alpha)}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= r \cos \theta_1 + \cos \frac{\pi}{2} \\
 &= r \cos \theta_1.
 \end{aligned}$$

$$\therefore (r_1, \theta_1)\text{-இன் இயக்குவழி, } \frac{l}{r} = r \cos \theta.$$

இஃது இயக்கு வரையின் சமன்பாடாதலின், R புள்ளியின் இயக்குவழி ஒத்த இயக்கு வரையாகும்.

10.24. $\frac{l}{r} = 1 + \cos \theta$ யாவனின் P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் R புள்ளியில் வெட்டினும், $SR^2 = SP \cdot SQ$.

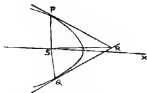
P, Q புள்ளிகளின் ஆரைக்கோணங்கள் α, β எனின், இப் புள்ளிகளின் கோணதூரக் கூறுகள்

$$P(SP, \alpha), Q(SQ, \beta).$$

$\therefore P, Q$ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{l}{r} = \cos \theta + \cos(\theta - \alpha) \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{l}{r} = \cos \theta + \cos(\theta - \beta) \quad \dots \quad (2)$$



படம் 115.

தொடு கோடுகள் (1), (2) வெட்டும் புள்ளி $R(r_1, \theta_1)$ எனின்,

$$r_1 = SR = \frac{l}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \quad \dots \quad (3)$$

$$\theta_1 = \angle NSR = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \dots \quad (4)$$

R புள்ளி P புள்ளியிலிருந்து தொடுகோட்டின் மீதமைவதால்,

$$\begin{aligned} \frac{l}{r_1} &= \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 - \alpha) \\ \therefore \frac{l}{SR} &= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha \right) \\ &= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \quad \dots \quad (5) \end{aligned}$$

மேலும், P, Q புள்ளிகள் கூம்பு வளைவின் மீதமைவதால்,

$$\frac{l}{SP} = 1 + \cos \alpha \quad \dots \quad (6)$$

$$\frac{l}{SQ} = 1 + \cos \beta \quad \dots \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{l^2}{SP \cdot SQ} &= (1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta) \\ &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ &= \frac{l^2}{SR^2} \end{aligned}$$

$$\therefore SP \cdot SQ = SR^2.$$

19-25. (r_1, θ_1) புள்ளியிலிருந்து $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \dots \quad (1)$$

என்ற கூம்பு வளைவுக்கு ' α ' புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos(\theta - \alpha) \quad \dots \quad (2)$$

இது (r_2, θ_1) புள்ளி வழிச் செல்கின்ற,

$$\frac{l}{r_1} = e \cos \theta_1 + \cos (\theta_1 - \alpha) \quad \dots (9)$$

சமன்பாடுகள் (9), (8)-இன்குத்து 'α'-ஐ நீக்கினால், இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

சமன்பாடுகள் (9), (8)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta - \left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right) = 0.$$

$$\cos \alpha \cos \theta_1 + \sin \alpha \sin \theta_1 - \frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 = 0.$$

குறுக்குப் பெருக்கல் விதியைப் (rule of cross multiplication)

$$\cos \alpha = \frac{\left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right) \sin \theta_1 - \left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right) \sin \theta}{\sin (\theta - \theta_1)}.$$

$$\sin \alpha = \frac{\left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right) \cos \theta - \left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right) \cos \theta_1}{\sin (\theta - \theta_1)}.$$

இவ்விரண்டையும் வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டி,

$$\begin{aligned} \sin^2 (\theta - \theta_1) &= \left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right)^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \\ &+ \left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right)^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2 \left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right) \\ &\times \left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right) (\cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1) \\ \text{(அ.து)} \quad \sin^2 (\theta - \theta_1) &= \left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right)^2 \\ &- 2 \left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right) \left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right) \cos (\theta - \theta_1). \end{aligned}$$

$$X = \frac{l}{r} - e \cos \theta, \quad Y = \frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1, \text{ எனின்,}$$

$$\sin^2(\theta - \theta_1) = X^2 + Y^2 - 2XY \cos(\theta - \theta_1).$$

$$1 - \cos^2(\theta - \theta_1) = X^2 + Y^2 - 2XY \cos(\theta - \theta_1).$$

$$1 - X^2 - Y^2 = \cos^2(\theta - \theta_1) - 2XY \cos(\theta - \theta_1).$$

இரு புறமும் $X^2 Y^2$ -ஐக் கூட்டினர்,

$$1 - X^2 - Y^2 + X^2 Y^2 = X^2 Y^2 - 2XY \cos(\theta - \theta_1) + \cos^2(\theta - \theta_1).$$

$$\therefore (X^2 - 1)(Y^2 - 1) = [XY - \cos(\theta - \theta_1)]^2$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-அ)} \quad & \left[\left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right)^2 - 1 \right] \left[\left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right)^2 - 1 \right] \\ & = \left[\left(\frac{l}{r} - e \cos \theta \right) \left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1 \right) - \cos(\theta - \theta_1) \right]^2. \end{aligned}$$

மாதிரி 12 : $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவின் குவியல் வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம் கூம்பு வளைவை நான்கு புள்ளிகளில் செட்டுகிறது. அப்புள்ளிகளின் தூரம் குவிவத்திற்குத் து r_1, r_2, r_3, r_4 எனின்,

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{l} \text{ என நிறுவுக.}$$

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \dots \quad (1)$$

வட்டத்தின் மீட்டம் a எனவும், மீட்டம் தொடக்கக் கோட்டுடன் சிறப்பிற்கும் கோணம் ϕ எனவும் கொள்வால், வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r = a \cos(\theta - \phi) \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடு (1)-இலிருந்து $\frac{l-r}{er} = \cos \theta$.

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{l-r}{er} \right)^2}$$

இவதச் சமன்பாடு (2)-இல் பிரதிபலிக்க.

$$\begin{aligned} r &= a \cos(\theta - \phi) \\ &= a(\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi) \\ &= a \left[\frac{1-r}{er} \cos \phi + \sqrt{1 - \frac{(1-r)^2}{e^2 r^2}} \sin \phi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(அ-து)} \quad e^2 r^4 + 2ae \cos \phi r^3 + (a^2 - 2ae \sin \phi \cos \phi - a^2 e^2 \sin^2 \phi) r^2 \\ - 2(a^2 r + a^2 r^2) = 0, \end{aligned}$$

இதன் மூலங்கள் r_1, r_2, r_3, r_4 ஆகும்.

$$\begin{aligned} \therefore S_2 &= r_1 r_2 r_3 + r_2 r_3 r_4 + r_3 r_4 r_1 + r_1 r_4 r_2 \\ &= \frac{2/a^2}{e^2} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

$$S_4 = r_1 r_2 r_3 r_4 = \frac{a^2 l^2}{e^2} \dots \dots \dots (4)$$

(5)-இன் இரு பக்கமும் $r_1 r_2 r_3 r_4$ -ஆல் வகுக்க,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} &= \frac{2/a^2}{e^2} \cdot \frac{1}{r_1 r_2 r_3 r_4} \\ &= \frac{2/a^2}{e^2} \cdot \frac{e^2}{a^2 l^2} \\ &= \frac{2}{l}. \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{l}.$$

பயிற்சி 10.2.

1. $\left(4, \frac{\pi}{8}\right), \left(-20, \frac{5\pi}{8}\right)$ எனும் புள்ளிகள் $\frac{10}{r} = 1 + 2 \cos \theta$ என்ற அநிபரவணவின் மீதுள்ளவை என நிறுத்த.

2. $\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$, $\frac{l}{r} = -e \cos \theta - 1$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒரே கூம்பு வளைவைக் குறிக்கும் என நிறுவுக.

3. PSP' , QSQ' என்பவை குவிய நான்கள். இவை தம்மன் செங்குத்தாக வெட்டினும் $\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'}$ ஒரு மாநிலி என நிறுவுக.

4. கூம்பு வளைவின் PQ தாண் குவியம் S -இல் ஏற்கும் கோணம் θ (மாநிலி) எனின், P , Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழி S -ஐ குவியமாகக் கொண்ட மற்றொரு கூம்பு வளைவு என நிறுவுக.

5. α , β என்பவை $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவின் விட்டத்தின்து துளிகளின் ஆணைக்கோணங்களெனின், $\tan \alpha$, $\tan \beta = \frac{e+1}{e-1}$ என நிறுவுக.

6. $\frac{l}{r} = 1 - e \cos(\theta - \gamma)$ கூம்பு வளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளைக் காண்க.

7. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவுக்கு α , β , γ புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (r_1, θ_1) புள்ளியில் சந்திக்குமெனின்,

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

8. கூம்பு வளைவின் குவிய நான்கள்தம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவழி மற்றொரு கூம்பு வளைவு என நிறுவுக.

9. $\frac{l_1}{r} = 1 - e_1 \cos \theta$, $\frac{l_2}{r} = 1 - e_2 \cos(\theta - \phi)$ கூம்பு வளைவுகள் ஒன்றையொன்று தொடுமெனின்,

$$l_1^2(1 - e_1^2) + l_2^2(1 - e_2^2) = 2l_1l_2(1 - e_1e_2 \cos \phi)$$

என நிறுவுக.

10. பொதுக்குவிசைக் கூம்பு வளைவுகள் இரண்டின் பொது நான்களையிரண்டு, கூம்பு வளைகளின் இயக்குவரைகள் வெட்டுமே புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

11. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவில் நான் AB குவியத்தில் செங்கோணத்தை ஏற்றுவோமென்றால்,

$$\left(\frac{1}{SA} - \frac{1}{l} \right)^2 + \left(\frac{1}{SB} - \frac{1}{l} \right)^2 = \frac{e^2}{l^2} \text{ என நிறுவுக.}$$

12. ஒரு நீள் வட்டத்தின் மையத்தை அந்ந் குவிய நான் கீறப்பிக்கும் கோணம் α எனின், அத்தானின் குவிய கவிடத்துத் தொடுகோடுகளின் இடைப்பட்டக் கோணம்

$$\tan^{-1} \left(\frac{2e \sin \alpha}{1 - e^2} \right) \text{ என நிறுவுக.}$$

13. ஒரு கூம்பு வளைவைய ϕ புள்ளியிடத்துத் தொடும் வட்டம் குவியம் வழிச்செல்லின், அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு $r(1 - e \cos \phi) = l \cos(\theta - \phi) - el \cos(\theta - 2\phi)$ என நிறுவுக.

14. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவில் α, β, γ புள்ளி கவிடத்துச் செங்கோடுகள் (r_1, θ_1) புள்ளியில் சந்திப்பின், $2\theta_1 = \alpha + \beta + \gamma$ என நிறுவுக.

15. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவில் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ புள்ளி கவிடத்துச் செங்கோடுகள் (r_1, θ_1) புள்ளியில் சந்திப்பின் $\alpha + \beta + \gamma + \delta - 2\theta_1 = (2n + 1)\pi$ என நிறுவுக.

16. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவில் P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் R-இல் சந்திக்கும். நான் PQ இயக்கு வரையைய M-இல் சந்திப்பின் $\angle MSR = 90^\circ$ என நிறுவுக.

17. $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ என்ற கோடு $\frac{l}{r} = 1 + e \cos(\theta - \alpha)$ கூம்பு வளைவின் தொடுகோடுகளின், $A^2 + B^2 - 2e(A \cos \alpha + B \sin \alpha) + e^2 - 1 = 0$ என நிறுவுக.

18. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவின் குவியத்திலிருந்து அதன் தொடு கோட்டிற்கு வரைபடம் செங்குத்துக் கோடுகளின் குடிப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $r^3 (1 - e^2) + 2ler \cos \theta - e^3 = 0$ என நிறுவுக.

19. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவின் தான் PQ குவியத்தில் ஏற்கும் கோணம் 2β . PSQ கோணத்தின் உள்ளிரு சமவெட்டி தான் PQ -ஐ R -இல் சந்திக்கு மெனின், R -இன் இயங்கு வழி $\frac{l \cos \beta}{r} = 1 + e \cos \beta \cos \theta$ என நிறுவுக.

20. $\frac{l}{r} = 1 + \cos \theta$ பரவளைவின் மீதுள்ள A, B, C புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் $A'B'C'$ என்ற முக்கோணத்தை அளங்கூர் மெனின்,

$$SA, SB, SC = SA', SB', SC' \text{ என நிறுவுக.}$$

21. LSL' என்பது $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வளைவின் செங்குத்துவழி. L புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு கூம்பு வளைவை மறுபடியும் M புள்ளியில் சந்திப்பின்,

$$1 + 3e^2 + e^4 = (1 + e^2 - e^4) SM \text{ என நிறுவுக.}$$

22. $PSP', PS'Q$ என்பவை குவிய நான்குமெனின், $\frac{SP}{SP'} + \frac{S'P}{S'Q}$ -வின் மதிப்பு P புள்ளியின் நிலையைச் சாராது என நிறுவுக.

விடைகள்

$$9. \frac{l}{r} = \left(e - \frac{1}{e}\right) \left[\cos(180 - \theta + \gamma) \pm \frac{\sin(\theta - \gamma)}{\sqrt{e^2 - 1}} \right].$$

கலைச் சொற்கள்

A

Anticlockwise	— இடஞ்சுழியாக
Arithmetic progression	— கூட்டு விருத்தி
Asymptote	— தொலைத் தொடுகோடு
Axes of transformation	— அச்ச நில மாற்றம்
Axis	— அச்ச, ஆயம்

B

Bisector	— சமவெட்டி
external bisector	— வெளியிரு சமவெட்டி
internal bisector	— உள்கிரு சமவெட்டி
perpendicular bisector	— மையக்குத்துக் கோடு

C

Centre	— மையம்
external centre of similitude	— வெளி வடிவொப்ப மையம்
internal centre of similitude	— உள் வடிவொப்ப மையம்
Chord	— நாண்
Circle	— வட்டம்
auxiliary circle	— துணை வட்டம்
circle of similitude	— வடிவொப்ப வட்டம்
coaxial circles	— பொது அச்ச வட்டங்கள்
director circle	— குத்துத் தொடுகோடு வட்டம்
orthogonal system of circles	— ஒரு திரை செக்குத்து வட்டங்கள்
orthogonal system of coaxial circles	— பொது அச்ச ஒரு திரை குத்து வட்டங்கள்
system of circles	— ஒரு திரை வட்டங்கள்

Circumference	— பரிதி
Conic	— கூம்பு வளைவு
central conic	— மையக் கூம்பு வளைவு
confocal conic	— பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுகள்
Conjugate lines	— துணையியக் கோடுகள்
Conjugate points	— துணையியப் புள்ளிகள்
Constant	— மாறாதி
Contact	— தொடுதக
contact of first order	— மூதல் வரிசைத் தொடுதக
contact of second order	— இரண்டாம் வரிசைத் தொடுதக
contact of third order	— மூன்றாம் வரிசைத் தொடுதக
Coordinates	— அச்சத் தூரங்கள், ஆயத் தொலைகள்
cartesian coordinates	— தேக்காட்டின் கூறுகள்
Curve	— வளைவரை

D

Diagonal	— நுரை விட்டம்
Diameter	— விட்டம்
Directrix	— இயக்கு வரை
Director circle	— குத்துத் தொடுகோடு விட்டம்
Discriminate	— தன்மைக் காட்டி

E

Eccentric angle	— துணை விட்டக்கோணம்
Eccentricity	— மையத் தொலை விலிதம்
Ellipse	— நீள் விட்டம்
Equation	— சமன்பாடு
Equi-conjugate diameter	— துணையியச் சம விட்டங்கள்

F

Fixed line	— நிலையான கோடு
Fixed point	— நிலைத்த புள்ளி
Focal chord	— குவிய நான்
Focal distance	— குவியத் தூரம்
Focus	— குவியம்
Function	— சார்பு

	G
Geametric progression	— பெருக்கு விகிதம்
Geometry	— வடிவ அணிதம்
coordinate geometry	— ஆயத் தொலை வடிவ அணிதம்
	H
Homogeneous	— சமவடித்தான
Hyperbola	— அநிபரவணவடி
Hypotenuse	— கர்ணம்
	I
Incentre	— உள்ள வட்டமையம்
Independent	— சார்பற்ற
Infinity	— கத்தழி
Intercept	— வெட்டுத் துண்டு
	L
Latus rectum	— செவ்வகவம்
Locus	— இயக்கு கழி
	M
Major axis	— பெருச்ச
Maximum	— மீள்பெரு
Minimum	— மீள் சிறு
Minor axis	— சிறுச்ச
	N
Normal	— செங்கோடு
Normal form	— செங்குத்து வடிவம்
Notation	— குறியீடு
	O
Ordinate	— குத்தாயம்
Origin	— ஆதி
Orthocentre	— குத்துக் கோட்டுச் சத்தி, செவு குத்து மையம்

	P
Parabola	— பரவளைவு
Parallel	— இணையான
Parameter	— துணைப்பலகு
Point	— புள்ளி
limiting points	— எல்லைப் புள்ளிகள்
point circle	— புள்ளி வட்டம்
Polar	— இணைக் கோடு
Polar coordinates	— கோண தூரக் கூறுகள்
Polar equations	— கோண தூர சமன்பாடுகள்
Pole	— இணைப்புள்ளி, மூளைவு
	R
Radical axis	— சமத்தொடு அச்ச
Radical centre	— சமத்தொடு வரை மையம்
Radius	— ஆரம்
Rectangular hyperbola	— செவ்வக ஆதிபரவளைவு
	S
Semi-diameter	— அரை விட்டம்
Sign	— குறி
negative sign	— எதிர்க்குறி, குறைக்குறி
positive sign	— நேர்க்குறி, மிகைக்குறி
Slope	— சரிவு
Straight line	— நேர்க் கோடு
Subnormal	— செங்கோட்டடி
Subtangent	— தொடுகோட்டடி
Symmetric	— சமச்சீர்
	T
Tangent	— தொடுகோடு
direct common tangent	— நேர்ப் பொதுத் தொடுகோடு
transverse common tangent	— குறுக்குப் பொதுத் தொடுகோடு
Trapezium	— சரிவகம்
Triangle	— முக்கோணம்

	U
Uniform	— ஒரு தீர்மான
Uniquely	— ஒரே முறைகளில்
Unit	— அலகு
	V
Value	— மதிப்பு
real value	— உண்மை மதிப்பு, மெய்யான மதிப்பு
Variable	— மாறி
Vertex	— முனை, உச்சி
	X
X-axis	— x அச்சு, x ஆயம்
	Y
Y-axis	— y அச்சு, y ஆயம்
	Z
Zero	— பூச்செறி
Zone	— மண்டலம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

1971 ஜூலைவரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

௧1. பொருளாதாரம்—I
௧1-A " II
௧2. சொலிவத் பொருளாதார வளர்ச்சி
௧3. அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்
௧4. பொருளாதாரச் சித்திரை வரலாறு
௧5. பன்னாட்டு வானியல்
6. புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்
7. பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்—I II
8. " II
9. பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு
௧10. பணவியல் பாக்கியங்கள்—I II
௧11. " II
12. நவீன பால்கு இயல்
௧13. இந்தியச் செலாவணியின் பால்கு முறைகள்
௧14. அரசாங்க நிதி இயல்

*மூல நூல் (Original Book)

ரூ. வர. 6 50
... 9 00
... 4 25
... 4 50
... 7 00
... 6 00
... 12 00
... 12 00
... 10 75
... 7 00
... 6 75
... 11 50
... 5 00
... 5 50
... 4 75

... சி. வேலாயுதம்
... டாக்டர் எம். ஜே. சே. தவராஜ்
... " "
... சோனாசலம்
... டி. அ. கோகிலாசாமி
... திருமதி ஆர். நாமரஜாட்சி
... தி. சி. மோகன்
... எச். ஏ. அப்துல்வாசி,
... பி. வி. ஸ்ரீதேவசன்
... க. வத்தையன்
... சி. வேலாயுதம்
... " "
... க. வெற்றேவர்
... பி. வி. ஸ்ரீதேவசன்
... ஆர். சோனாசலம்

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

15. இந்நிலைப் பொருளியல்—I	...	எம். பாலசுப்ரமணியன்	...	10 00
16. " II	...	எம். லக்ஷ்மீநாதன்	...	4 25
17. நகரப் பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	...	சி. கந்தராஜன்	...	10 75
18. " II	...	எஸ். குழந்தைசாதன்	...	10 50
19. இடநிலைப் பொருளாதார வரலாறு—I	...	கி. சி. இராமசாமி	...	6 00
20. " II	...	"	...	6 00
21. குடும்பக்களத்தில் தவீனப் பொருளாதார வளர்ச்சி	...	தி. சி. மேன்கள்	...	5 00
22. அபிவிருத்திப் பொருளாதார வரலாறு—I	...	மு. க. சுப்பிரமணியம்	...	11 00
23. " II	...	சி. வி. சீனிவாசன்	...	6 00
24. " III	...	"	...	6 50
25. அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	...	எஸ். குமாரசாமி	...	10 00
26. " II	...	ஆர். சேஷசாயி	...	9 50
27. இந்நிலையில் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	...	தே. வேம்பன்	...	10 00
28. " II	...	ஜி. சிதம்பரம்	...	8 00
29. பணம்—சீறு விசயங்கள்	...	கே. இராசாகிருஷ்ணன்	...	10 00
30. வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	...	கு. ஆனந்தசாஸ்திரி	...	9 50
31. பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வணிகப் புரட்சி	...	ஆர். கருப்பையன்	...	11 00
32. பொருளாதாரப் பொருளாதாரம்—I	...	ஏ. குழந்தை	...	11 00
33. " II	...	எம். குழந்தைசாதன்	...	7 00
34. வரவு செலவுத் திட்டம்	...	ஆர். ரங்கசாஸ்திரி	...	6 00

வரலாறு—(தொடக்கம்)

54.	இங்கிலாந்து வரலாறு—IV	...	எம். ஜே. இராஜகோபால்	...	5 00
55.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	...	க. ந. திருநாவுக்கரசு	...	15 00
56.	..	II	எம். எக்ஸ். பிராண்டர்	...	8 00
57.	..	III	5 00
58.	இத்தியானின் சிறப்பு வரலாறு—I	...	தி. வெ. குப்புசாமி	...	6 00
59.	..	II	ஏ. உஸ்மான் ஹேரீப்	...	6 00
60.	..	III	சி. பாண்டிநாதன்	...	7 25
61.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	...	சைமன் ஜி. எஸ். பாக்கிவராதன்	...	7 50
62.	..	II	7 00
63.	..	III	7 75
64.	ஆக்கக் கற்போசனை இந்திய வரலாறு—I	...	சி. இராமநாதன் முதலதாஸ்	...	8 25
65.	..	II	தி. வெ. குப்புசாமி	...	7 50
66.	..	III	ஏ. உஸ்மான் ஹேரீப்	...	10 50
67.	முசுலமான் பேரரசு—I	...	க. ந. திருநாவுக்கரசு	...	7 50
68.	..	II	ஏ. உஸ்மான் ஹேரீப், எம். எக்ஸ். பிராண்டர்	...	7 50
69.	ஆங்கில அரசியல்வாதிகள் வரலாறு—I	...	எம். எக்ஸ். பிராண்டர், பா. மானிக்கவேலு	...	7 75
70.	..	II	எம். எக்ஸ். பிராண்டர்	...	7 50
71.	..	III	எம். எக்ஸ். பிராண்டர், இரா. அன்னாபாய்	...	6 75
72.	..	IV	இரா. அன்னாபாய், பா. மானிக்கவேலு	...	6 50
	..		பா. மானிக்கவேலு	...	7 00

73.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	...	சி. க. இராமச்சந்திரன்	...	6	50	
74.	" "	II	...	சி. ல. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	...	6	75
75.	" "	III	...	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	...	6	50
76.	இந்தியாவில் முகவராயின் ஆட்சி—I	யு. கண்ணிகவிவர்து	...	5	00
77.	" "	II	...	ஏ. உலுமான் செலீப்	...	5	00
ஆங்கிலம்							
78.	அரசியல் அமைப்புகள்	...	ஜே. இராமச்சந்திரன்	...	4	82	
79.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	...	மேல. கிளார்க் கி. டி. பெல்கிஸ்	...	7	80	
80.	இந்திய அரசியலமைப்பு	...	எர். கண்ணையா	...	4	75	
81.	அரசியலுக்கு முன் அநீதிகள்	...	டி. செல்வப்பா	...	8	50	
82.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	...	மேல. கங்குலவர் கிளார்க் கி.	...	9	50	
83.	பென்ஷன் அரசியல்—I	...	திருமதி தர்ஜனாள் பாலர்	...	15	00	
84.	" "	II	13	25	
85.	பொருத்துறை ஆட்சி இயல்—I	...	வீ. கண்ணையா	...	9	00	
86.	" "	II	ஆ. வெல்திசன்	...	7	25	
87.	பொருத்துறை ஆட்சியியலுக்கு முன் அநீதிகள்—I	...	வீ. கண்ணையா	...	7	50	
88.	" "	II	டி. செல்வப்பா	...	7	50	
89.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	...	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். கங்குலனியன்	...	9	25	
90.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புகளை வளர்த்தல்—I	...	வீ. கண்ணையா	...	5	25	
91.	" "	II	வீ. கண்ணையா, கி. ஏ. அனுகுமாரன்	...	5	75	

அரசியல்—(தொடர்ச்சி)

92. இந்திய ஆட்சி அமைப்புகளாற வளர்ச்சி—[]	...	கி. ர. அனுமந்தன்	...	7 25
93. மக்கள் ஆட்சி	...	க. சந்திரன்	...	4 25
94. 1919 முதல் சர்வதேச உழவுகளும் உலக அரசியலும்—[]	...	என். ஜே. ராஜகோபாய்	...	7 75
95. சமூக, அரசியல் கொள்கைகள் அடிப்படைகள்	...	மோ. வள்ளுவர் கிளர்ச்சி	...	7 00
96. அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்குப் பதிலாக—[]	...	பா. முகியாரசாயன்	...	5 75
97. "	...	பா. முகியாரசாயன்	...	6 00
98. "	...	கி. ர. அனுமந்தன்	...	5 75

உளவியல்

99. குழந்தை உளவியல்—[]	...	கி. ர. அனுமந்தன்	...	8 00
100. "	...	"	...	7 00
101. உட்கவர் மனம்	...	சி. த. வைத்தீஸ்வரன்	...	7 00
102. இலிங்கோர் உளவியல்—[]	...	தி. இரா. அரங்கராசன்	...	12 00
103. "	...	"	...	9 00
104. சமூக உளவியல்	...	என். வேதவேணி மாணுவேல்	...	9 25
105. குழந்தை உளவியல்	...	ஆ. பெசைட். கிரீஸ்ராஜ்	...	11 00
106. சித்தரின் உளம்	...	"	...	3 00
107. குழந்தை உளம்	...	டாக்டர் மு. அரும்	...	6 25
108. உளநவரீகம்	...	டாக்டர் து. ஏ. சண்முகம்	...	6 00

தத்துவம்

109. இந்த அயத் தத்துவம்
 110. அறிவு அராயத்தி இயல்
 111. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 112. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 113. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 114. இந்த அயத் தத்துவம்—1
 115. —11
 116. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்—1

அறிவு

117. அறிவு—ஒர் அறிவு

அறிவு

118. அறிவு—ஒர் அறிவு

அறிவு

119. அறிவு—ஒர் அறிவு
 120. அறிவு—ஒர் அறிவு
 121. அறிவு—ஒர் அறிவு

அறிவு

122. அறிவு—ஒர் அறிவு
 123. அறிவு—ஒர் அறிவு

109. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 110. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 111. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 112. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 113. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 114. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 115. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 116. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 117. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 118. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 119. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 120. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 121. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 122. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்
 123. அறிவு அராயத்தி தத்துவம்

புன் விபரங்கள்

௧145. புன்விவரம் — ஆதிமுகம்
146. புன்விவரம் ஓசைகள் — I
147. " II
148. தம்மையர் கருதுபுள்ள பேரண்டம்

உயர் கணிதம்

௧149. ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்
௧150. வகை குறியீடுகள்
௧151. பெளகை குறியீடுகள்

விளக்கங்கள்

௧152. விளக்கங்கள்

பொதுகணிதம்

153. ஒளி நூல்

விஞ்ஞானம்

௧154. வானவெளி கைத்தி
௧155. ரோகோ
௧156. எக்ஸ்-ரேயிடுகள்
௧157. பாய்வுகள்
௧158. தாவரம் — வாழ்வும் வானவழி
௧159. கிரூபு
௧160. தாவரங்களின் வாழ்விடம்
*மூல நூல் (Original Book)

...	க. வைத்தியநாதன்	... 10 75
...	கே. சண்முகத்தேவன்	... 10 00
...	கே. ஆர். இராஜகோபாலன்	... 14 00
...	தி. வி. வடகாந்தியன்	... 6 00
...
...	யு. கே. மானிக்கவாசகம் பிள்ளை	... 4 25
... 3 00
...	தி. கோவிந்தராசன்	... 3 25
...
...	பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன்	... 12 00 5
...
...	ச. சம்பந்தம்	... 10 00
...
...	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	... 6 00
...	டாக்டர் சி. திருநாளைப்பேட்டை	... 4 75
...	பெ. தா. அப்பாணி, ஜெ. பி. மானிக்கம்	... 4 50
...	பெ. வ. அண்ணாமலை	... 3 50
...	டாக்டர் கு. சிவியாசன்	... 8 00
...	கு. பெரியசாமி	... 4 00
...	எம். கந்திரம்	... 6 50

மருத்துவம்

161. நீரிழை-வெள்ளைக்காய்	... டாக்டர் ஜி. வெங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிவேலு	... 2 50
162. மனப்பெருக்கல் மருத்துவம்	... டாக்டர் (முனைவர்) ந. மணிமொகலன்	... 3 25
163. பாக்டீரியா	... டாக்டர் க. கதிவேலு	... 2 50
164. புற்றுநோய்	... டாக்டர் க. கதிவேலு	... 3 50
165. உடலளவளிக்கல்—I	... டாக்டர் ஜி. வெங்கடசாமி, டாக்டர் ஜி. சேது, டாக்டர் என். கே. துரைராஜ், டாக்டர் சேது	... 6 75
166. " II	... டாக்டர் அ. கதிவேலு	... 5 50
167. எண்புருக்கி நோய்	... டாக்டர் அ. கதிவேலு	... 7 25
மேலியம்	... கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வெண்கடசாமி	... 3 50
கட்டுநாடி	... அ. வெங்கடசாமி	... 5 50
169. உலகக் கட்டுநாடி இயக்கம்	... எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	... 10 00
சட்டம்	... எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	... 10 00
170. குற்றமில்லாத சட்டம்	... எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	... 10 00
மேலது குக்கன்	... எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	... 10 00
171. மருத்துவ கருத்தி	... எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	... 10 00
172. மருத்துவ கருத்தி	... எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	... 10 00
173. மருத்துவ கருத்தி	... எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	... 10 00
174. மருத்துவ கருத்தி	... எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	... 10 00

- 175. உணவுப் பண்டமும்
●176. பள்ளி நிர்வாக அமைப்பு -ஆர்ப்பாட்டக்
கருத்துகள்

புதுமுக (P. U. C.) அருப்புக்கோட்டை

- 177. உலக வரலாறு
●178. பொருளாதாரம்
●179. வணிகவியலுக்கு முன் அறிமுகம்-I
●180. II
●181. பொருளாதாரம்
●182. புதுமுக பொருளாதாரம்
●183. பொருளாதாரம்-முன் அறிமுகம்
●184. புதுமுக வரலாறு அறிமுகம்-I
●185. II
●186. புதுமுக வரலாறு அறிமுகம் II
●187. II
●188. அறிமுகம்-முன் அறிமுகம்-I
●189. II
●190. வேளாண்மை
●191. புதுமுக வேளாண்மை
●192. விவசாயம்
●193. புதுமுக விவசாயம்
●194. புதுமுக வரலாறு தரவரலாக
●195. தரவரலாக (Original Book)

- ... தி. வேங்கடகிருஷ்ணய்யங்கார் 4 50
... எஸ். சத்தானம், எம். ஏ. துரைசிவம் 6 25
... டி. ஆர். இராமச்சந்திரன் 4 00
... ஜி. சிதம்பரம் 2 75
... கு. அனந்தபதிநா 2 50
... டாக்டர் பி. திருநாசன் 2 25
... ஆர். தரவரலாக 7 50
... டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ் 6 00
... எஸ். சம்பத் 7 00
... கே. சாந்தகோபாலன் 7 00
... டி. சோனித் ராஜன், முத்துசாமி 7 00
... ஆர். மாதேவன் 4 50
... டி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துசாமி 3 25
... சி. ஏ. பத்மசாமி 7 00
... எஸ். ஆர். சாமி 5 50
... இ. ம. அனந்தசாமி 4 00
... எஸ். சத்திரம் 7 25
... 4 00

பட்டப்பழப்பிற்குரிய (பி.எஸ்.ஸி.) நூல்கள்
(அட்டைக் கட்டுப் பதிப்புக்-கழிவு இல்லை)

வளநிகம் (Physion)		உ. எம்
ச195. எத்திரவியல் சிதப்புப் பாடம் (Book I)	...	6 25
ச196. "	...	5 50
ச197. வெப்பவியல்—சிதப்புப் பாடம்	...	5 25
ச198. செவ்வணைத வெள்திகம்—சிதப்புப் பாடம் (Book I)
	ஆர். கிருட்டினசாமி	...
ச199. "	II	4 50
ச200. வெள்திகம்—துணைப்பாடம்-I (Book I)	...	3 25
ச201. "	...	4 00
ச202. செவ்வணைத வெள்திகம்—துணைப்பாடம்	...	3 00
ச203. மின்னியல் கர்த்தவியல்—சிதப்புப் பாடம் (Book I)	...	4 50
ச204. "	II	4 75
ச205. "	III	4 50
ச206. ஒளியியல்—சிதப்புப் பாடம்	...	4 25
ச207. வெள்திகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி 2)	...	7 75
ச208. வெள்திகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி 3)	...	6 00
ச209. வெள்திகம்—சிதப்புப் பாடம்	...	4 50
	ஆர். கிருட்டினசாமி	4 50

*210.	இடைநிலைப் பொருள்கள்—சிறப்புப் பாடம்	...	எம். ஏ. தங்கராஜ்	...	6 75
*211.	இடைநிலைப் பொருள்கள்—சிறப்புப் பாடம்	...	டி. குருசாமி	...	5 00
வேதியியல்					
*212.	செயல்முறை கனிம வேதியியல்—துணைப்பாடம்	...	டாக்டர் முத்துக்குமாரசுவாமி	...	2 00
*213.	செயல்முறை கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்	...	டி. இராசமணிகம்	...	2 25
*214.	பொருள்கள் வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	...	டி. சத்தியமூர்த்தி	...	4 00
*215.	3 50
*216.	கனிம வேதியியல்—துணைப்பாடம்	...	சி. ஏ. பத்மநாபன்	...	6 50
*217.	கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	...	பி. ஏ. முனியாண்டி	...	4 00
*218.	4 25
*219.	பொருள்கள் வேதியியல்—துணைப்பாடம்	...	ஆர். துரைசாமி	...	4 75
*220.	செயல்முறை வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	...	டி. ஆர். முத்துசாமி	...	4 50
*221.	3 75
*222.	செயல்முறை கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்	...	எச். ஆறுமுகம்	...	3 50
*223.	அமில வேதியியல்—துணைப்பாடம்	...	சி. ஏ. இராசமணிகம்	...	5 00
*224.	அமில வேதியியல்—I	...	எம். ஆர்க்குமார்	...	3 00
*225.	கனிம வேதியியல்—பகுதி-I (2-ம் பத்திரம்)	...	டி. கண்ணப்பன்	...	4 75
*226.	3 25
*227.	கனிம வேதியியல்—பகுதி-II (1-ம் பத்திரம்)	5 75
*228.	5 00

*229. இடைநிலைப் பொருள்கள்—சிறப்புப் பாடம்

கணிதம் (Mathematics)

௨289. இயற்கணிதம்—சிதம்பர் பாடம் (Book I)	...	4. கோவிந்தராஜன் கே. முத்துசாமி	...	4 25
௨290. "	...	"	...	3 25
௨291. தொகுமுறை வரைகணிதம்—சிதம்பர் பாடம்	...	ஆர். மகாதேவன்	...	2 00
௨292. எண்சாசு கணிதம்—சிதம்பர் பாடம்	...	எம். எம். இராமசாமி	...	5 50
௨293. திசுக்கொண கணிதம்—சிதம்பர் பாடம்	...	எம். அரங்கநாதன்	...	3 25
௨294. கணிதம்—துணைப்பாடம்	...	ஆர். அரங்கநாதன்	...	6 00
௨295. நிலையகம்—சிதம்பர் பாடம்	...	கே. இராஜகோபாலன்	...	5 00
௨296. முப்பீரணம் பகுமுறை வடிவ கணிதம்	...	கே. சிவசுப்பிரமணியன்	...	2 75
௨297. வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்	...	ஆர். மகாதேவன்	...	2 00
௨298. கணிதம்—துணைப்பாடம்—பகுதி 2	...	ஆர். அரங்கநாதன்	...	5 75
௨299. காலகணிதம்—சிதம்பர் பாடம்—முதல் புத்தகம்	...	தி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி	...	5 50
௨300. வானியல்— " —இரண்டாம் புத்தகம்	...	"	...	3 75
௨301. இயக்ககணிதம்—சிதம்பர் பாடம்	...	ஆர். மகாதேவன், கே. சிவசுப்பிரமணியன், பி. ஆர். சுப்பிரமணியன்	...	7 00

புள்ளியியல் (Statistics)

௨302. புள்ளியியல்—துணைப்பாடம்	...	எம். கருப்பையா	...	3 50
-------------------------------	-----	----------------	-----	------

விவக்ஷியக் (Zoology)

*213.	முதுகெழுப்பற்றவை I—சிதப்புப்பாடம்	...	ஆர். முருகேசன்	...	5 00
*214.	" II—சிதப்புப்பாடம்	...	திருமதி எஸ். சே. வள்ளி	...	6 00
*215.	முதுகெழுப்பற்றவை—I—சிதப்புப்பாடம் (Book I)	...	திருமதி சாணி கத்தக்காரம்	...	5 00
*216.	" II (Book II)	...	"	...	9 75
*217.	முதுகெழுப்பற்றவை—II—சிதப்புப்பாடம்	...	திருமதி கிருஷ்ணவேணி நரசாயணன்	...	11 75
*218.	முதுகெழுப்பற்றவை—சிதப்புப்பாடம்	...	எஸ். ஆப்ரகாம்	...	9 00
*219.	முதுகெழுப்பற்றவை—துணைப்பாடம்	...	என். இராமலிங்கம்	...	9 00
*220.	முதுகெழுப்பற்றவை—துணைப்பாடம்	...	எம். சேது	...	6 00
*221.	செவ்வியல்—சிதப்புப்பாடம்	...	என். இராமலிங்கம்	...	5 50
*222.	மரபியல்—சிதப்புப்பாடம்	...	பெ. எம். அண்ணாமலை	...	5 25
*223.	சூழ்நிலைவியல்—உடற்செய்வியல் சிதப்புப்பாடம்—I	...	டி. ஆர். கிருஷ்ணன்	...	6 75
*224.	சூழ்நிலைவியல்—உடற்செய்வியல் .. —II	...	"	...	6 50
*225.	பரீட்சை	...	எஸ். ஆப்ரகாம்	...	6 25

தாவியியல் (Botany)

*226.	தாவியியல் உள்ளவைப்பேய்களும் வகைப்பாட்டியலும்—சிதப்புப்பாடம்	...	சே. இராஜசேகரன்	...	11 00
*227.	தாவியியல் அமைப்பியல்—சிதப்புப்பாடம்	...	சே. பாலசித்திரகமேனன்	...	9 25
*228.	தாவியியல் உள்ளவைப்பேய்கள்—சிதப்புப்பாடம்	...	டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜன்	...	7 25

*ஏன தூல் (Original Book)

தாயை விடும்—(தொடர்க்கி)

*259. தாயை விடும்—வாழ்க்கை—சிதம்பரம் பாடம்	... எஸ். சுந்தரம்	... 9 50
*260. தாயை விடும்—தூண்டில்	... பா. இராசசுந்தரம்	... 4 50
*261. தாயை விடும்—குழந்தைகள், மரபியல், உயிர்வாழ்வு	... கே. வெங்கடசுந்தரம்	... 4 00
*262. குழந்தைகள், மரபியல், மரபியல்—	... கே. ஆர். பாலசுந்தரம்	... 8 25
*263. குழந்தைகள், மரபியல், மரபியல்—	... கே. இராசசுந்தரம்	... 10 25
*264. தாயை விடும் (பாசியல், மரபியல், உயிர்வாழ்வு)	... டாக்டர் எம். கே. சுந்தரம்	... 9 00
*265. தாயை விடும்—குழந்தைகள்—சிதம்பரம் பாடம்	... ஆ. சம்பந்தம்	... 10 00
*266. குழந்தைகள்—சிதம்பரம் பாடம்	... கே. இராசசுந்தரம்	... 6 00

*ஆக தக் (Original Book)

